

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE LA SANTÍSIMA CONCEPCIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL



DESARROLLO DE UNA HERRAMIENTA NUMÉRICA DE ANÁLISIS PARA LOSAS DE HORMIGÓN ARMADO SOMETIDAS A ACELERACIONES VERTICALES

DENI ALEXIS HERRERA YÁÑEZ

INFORME DE PROYECTO DE TÍTULO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL

Profesor Guía: Dr. Edwin Behrens Rincón
Profesor Informante: Dr. Luis Gatica Simpertigue

Concepción, Mayo del 2011

Resumen

Se sabe que Chile es uno de los países sísmicos del mundo. Debido a esto se hace necesario considerar los efectos que produce un sismo en las estructuras. Durante el terremoto del 27 de Febrero de 2010, las estructuras de algunas ciudades de Chile fueron solicitadas fuertemente debido a la aceleración horizontal, sin embargo, la componente de aceleración vertical también fue muy importante. Por esta característica, este trabajo tiene por objetivo estudiar el efecto que produce la componente vertical de aceleración provocada por un sismo, sobre losas de hormigón armado, teniendo en cuenta que la aceleración se aplica sobre el borde de la losa. La metodología que ha sido utilizada, es la elaboración de un programa computacional escrito en lenguaje MATLAB, el cual utiliza el Método de los Elementos Finitos para calcular tanto las tensiones como deformaciones que aparecen sobre la losa. Para evaluar el efecto de la aceleración vertical sobre una losa producida por un sismo, se ha realizado un análisis estático y dinámico de la misma. El análisis estático consiste en obtener las distribuciones de tensiones que genera una carga estática uniformemente distribuida, la cual ha sido obtenida de la norma chilena: NCh 1537.Of86, *Diseño estructural de edificios, cargas permanentes y sobrecargas de uso*. El análisis dinámico consiste en obtener las envolventes de tensiones que genera la aplicación del registro vertical de aceleraciones del terremoto del 27 de Febrero del 2010.

Abstract

It is known that Chile is one of the most seismic countries in the world. Because of this it is necessary to take advice of structure's quake effects. During the earthquake of February 27, 2010, the structures of some cities in Chile were strongly shaken due to horizontal acceleration, however, vertical acceleration component was also very important too. For this feature, this work has as main goal to study the effect of the vertical component of acceleration caused by an earthquake on reinforced concrete slabs, keep in mind that acceleration is applied on the rim of the slab. The methodology has been used, is the elaboration of a software written in MATLAB language, which uses the finite element method for calculate both as well as tensions and strains that appear on the slab. For evaluating vertical acceleration effect on a slab caused by a quake, there has been perform a static and dynamic analysis of it. The static analysis consist in obtain the tension distributions generated by a static load, which has been obtained from the Chilean norm: NCh 1537.Of86, *Structural design of buildings, permanent load and overload usage*. The dynamic analysis consist in obtaining the envelopes of tensions generated by the application of registry of vertical acceleration of the earthquake on February 27, 2010.

*Dedicado a mis padres Rubén y Mirta,
y mis hermanos Carola, Cristian y Rodrigo.*

Agradecimientos

Durante todo el proceso de formación profesional que he vivido, han aparecido un sinnúmero de personas que de alguna u otra forma me han ayudado con este proceso, a través de un consejo o simplemente, con una palabra de apoyo, por lo tanto, sería necesario tener una gran cantidad de páginas disponibles para agradecerles, pero por motivos prácticos no se puede, en todo caso, muchas gracias a cada uno de ellos. Sin embargo, de aquel conjunto anterior de personas, siempre hay algunas que son más importantes, ya que tienen relación directa con el momento en el que me encuentro, porque su apoyo fué incondicional durante todo este proceso. Estas son mi familia, partiendo con mis padres, Rubén y Mirta, que me apoyaron en las buenas y en las malas, y también a mis hermanos: Carola y su esposo, Cristián y Rodrigo, que fueron fundamentales en que este proyecto haya llegado a buen fin, al igual que mi polola Andy, que me apoyó demasiado. Las personas nombradas anteriormente forman parte de una dimensión emocional, sin embargo este proceso, también, consta de una dimensión técnica, en la cual debo agradecer a los profesores que tuve durante la carrera, y especialmente a mi profesor guía, Dr. Edwin Marcelo Behrens Rincón, que sin su ayuda y astucia, este proyecto no hubiese llegado a buen puerto.

Índice general

Índice general	v
Índice de figuras	x
Índice de tablas	xiv
Nomenclatura	xv
1. Introducción	1
1.1. Generalidades	1
1.2. Objetivos	6
1.3. Objetivos específicos	6
2. Estructuras modeladas con múltiples GDL	7
2.1. Introducción	7
2.2. Ecuación de movimiento para sistemas con un grado de libertad	7
2.3. Ecuación de movimiento para sistemas con múltiples grados de libertad	9
2.3.1. Estructuras modeladas como edificio simple	9
2.3.2. Vibración libre de estructuras con múltiples GDL	11
2.3.2.1. Frecuencias naturales y modos normales	12
2.3.2.2. Método de superposición modal	13
2.3.3. Respuesta de un edificio al movimiento de la base	15

2.3.4.	Respuesta de un edificio simple con amortiguación al movimiento de la base	18
2.3.4.1.	Método de Newmark	21
2.4.	Ecuación de movimiento de una placa	22
2.4.1.	Deducción de la ecuación diferencial de movimiento de una placa en vibración libre	22
2.4.1.1.	Ecuaciones de equilibrio estático de la placa	22
2.4.1.2.	Ecuaciones de movimiento en vibración libre de una placa	25
3.	Formulación de Elementos Finitos	28
3.1.	Esfuerzos de flexión: Teoría de placas de Kirchhoff	28
3.1.1.	Estado de placa	28
3.1.2.	Hipótesis fundamentales	28
3.1.3.	Campo de deformaciones	29
3.1.4.	Campo de deformaciones, tensiones y esfuerzos	31
3.1.5.	Expresión del Principio de los Trabajos Virtuales	33
3.2.	Formulación de Elementos Finitos	34
3.2.1.	Elemento rectangular de cuatro nodos MZC, deducción de la matriz de rigidez, masa y vector de fuerzas nodales	35
3.2.1.1.	Cálculo de tensiones	39
3.2.1.2.	No Conformidad del elemento MZC	40
3.2.2.	Elemento triangular de tres nodos DKT, deducción de la matriz de rigidez, masa y vector de fuerzas nodales	41
3.2.2.1.	Teoría de placas de Reissner-Mindlin	42
3.2.2.2.	Campo de desplazamientos	42
3.2.2.3.	Campo de deformaciones y tensiones	43
3.2.2.4.	Matriz de Rigidez y Masa del elemento DKT	45
3.2.2.4.1.	Cálculo de tensiones	49

[illegible]

6.3.3.2.	Carga dinámica sobre la losa	85
6.3.4.	Mallado de Elementos Finitos	86
6.3.5.	Análisis tensional para losa N°1	88
6.3.5.1.	Distribución de tensiones para el caso estático	88
6.3.5.1.1.	Distribución de tensiones obtenidas a partir del elemento MZC	88
6.3.5.1.2.	Distribución de tensiones obtenidas a partir del elemento DKT	89
6.3.5.2.	Envoltentes de tensiones para el caso dinámico	91
6.3.5.2.1.	Envoltentes obtenidas a partir del elemento MZC	91
6.3.5.2.2.	Envoltentes obtenidas a partir del elemento DKT	92
6.3.6.	Análisis tensional para losa N°2	94
6.3.6.1.	Distribución de tensiones para el caso estático	94
6.3.6.1.1.	Distribución de tensiones obtenidas a partir del elemento MZC	94
6.3.6.1.2.	Distribución de tensiones obtenidas a partir del elemento DKT	95
6.3.6.2.	Envoltentes de tensiones para el caso dinámico	97
6.3.6.2.1.	Envoltentes obtenidas a partir del elemento MZC	97
6.3.6.2.2.	Envoltentes obtenidas a partir del elemento DKT	98
7.	Conclusiones y recomendaciones	100
	Bibliografía	102
	Bibliografía	102
	Anexos	
A.	Cálculo de matrices de rigidez y masa para el elemento DKT	104
A.1.	Sistema de coordenadas naturales	104

A.2. Funciones de forma del elemento DKT y sus derivadas	105
B. Espectro de aceleraciones para el registro vertical	110
B.1. Espectro de aceleraciones del registro vertical del terremoto del 27/02/2010 .	111

Índice de figuras

1.1. a) Edificio Alto Río, Concepción. Fuente: http://www.farm3.static.flickr.com . b) Torre O'Higgins, Concepción. Fuente: http://www.miradas.com	2
1.2. Daños en losa a nivel de esquinas de muro. Fuente: Inspección Post Sismo del 27 de Febrero del 2010 Edificio Don Manuel, realizada por Idiem.	3
1.3. Daños en losa cercana a muros. Fuente: http://www.reclamos.cl	3
1.4. Daños en losa cercana a muros. Fuente: Universidad Católica de la Santísima Concepción.	4
1.5. Daños en losa cercana a muros. Fuente: Universidad Católica de la Santísima Concepción.	4
2.1. Ejemplos de estructuras modeladas con un solo grado de libertad	8
2.2. Modelo matemático para un sistema con un grado de libertad	8
2.3. a) Esquema de un edificio simple. b) Deformada de un edificio simple.	10
2.4. Modelo de un edificio simple.	10
2.5. Modelo de edificio simple excitado en su base.	15
2.6. Modelo de edificio simple con amortiguación excitado en su base	18
2.7. Diagrama de cuerpo libre de la placa.	23
3.1. Definición geométrica de una placa y convenio de signos para desplazamientos y giros.	29
3.2. Deformación del plano medio de una placa delgada y giro de la normal.	30
3.3. Convenio de signos para tensiones y momentos en una placa.	32
3.4. Elemento de placa rectangular de cuatro nodos no conforme MZC.	35

3.5. Ejemplo de discontinuidad de la derivada $\frac{\partial w}{\partial y}$ a lo largo de un lado común a dos elementos.	40
3.6. a) Concepto de giro normal y tangencial a un lado. b) Desigualdad de las derivadas $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ en los nodos.	41
3.7. Definición geométrica del elemento de placa DKT y convenio de signos para desplazamientos y giros.	42
3.8. Elemento de placa DKT de tres nodos.	46
4.1. Convergencia del elemento MZC y DKT para losas rectangulares en el caso estático.	52
4.2. Ploteo de la deformada de la losa discretizada con elementos rectangulares.	53
4.3. Ploteo de la deformada de la losa discretizada con elementos triangulares.	53
4.4. Convergencia del elemento DKT para losas circulares en el caso estático.	54
4.5. Deformada de losa circular discretizada con la malla N°3.	55
4.6. Mallado de Elementos Finitos utilizadas en la validación.	55
4.7. Ploteo de la respuesta otorgada por la solución exacta y numérica (Newmark).	58
5.1. Diagrama de flujo para la programación del caso estático.	60
5.2. Diagrama de flujo para la programación del caso dinámico.	61
5.3. Interfase principal generada en MATLAB.	62
5.4. Ubicación de las pestañas despleables de la deformada dentro del programa.	63
5.5. Ubicación de las pestañas despleables para el cálculo de tensiones.	63
5.6. Ventana de ingreso de los parámetros de la aceleración del borde.	64
5.7. Pestañas desplegables para accionar la visualización de la deformada.	65
5.8. Pestañas desplegables para accionar la visualización de la envolvente de tensiones.	65
5.9. Pestaña desplegable para ejecutar la deformada en el tiempo de la losa.	66
5.10. Pestaña desplegable para visualizar las envolventes de tensiones de la losa.	66
6.1. Esquema de la geometría de la losa analizada.	68
6.2. Deformada de losa discretizada con elementos rectangulares.	68
6.3. Deformada de losa discretizada con elementos triangulares.	69

6.4. a) Mallado con elementos rectangulares. b) Mallado con elementos triangulares.	70
6.5. Esquema de la geometría de la losa circular analizada.	70
6.6. Deformada de losa circular discretizada con elementos triangulares.	71
6.7. Esquema de la geometría de la losa analizada.	72
6.8. Tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	72
6.9. Tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	73
6.10. Tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	73
6.11. Tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	74
6.12. Tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	74
6.13. Tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	75
6.14. a) Mallado con elementos rectangulares. b) Mallado con elementos triangulares.	76
6.15. Esquema de la geometría de la losa analizada.	77
6.16. Registro de aceleraciones verticales.	78
6.17. Envolvente de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	78
6.18. Envolvente de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	79
6.19. Envolvente de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	79
6.20. Envolvente de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	80
6.21. Envolvente de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	80
6.22. Envolvente de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	81
6.23. a) Mallado con elementos rectangulares. b) Mallado con elementos triangulares.	82
6.24. Vista en planta de la losa N°1.	84
6.25. Vista en planta de la losa N°2.	84
6.26. Registro de aceleraciones verticales del terremoto 27/02/2010.	85
6.27. a) Mallado de elementos rectangulares para la losa N°1. b) Mallado de elementos triangulares para la losa N°1.	86
6.28. a) Malla de elementos rectangulares para la losa N°2. b) Malla de elementos triangulares para la losa N°2.	87
6.29. Distribución de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	88
6.30. Distribución de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	88

6.31. Distribución de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	89
6.32. Distribución de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	89
6.33. Distribución de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	90
6.34. Distribución de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	90
6.35. Envolvente de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	91
6.36. Envolvente de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	91
6.37. Envolvente de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	92
6.38. Envolvente de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	92
6.39. Envolvente de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	93
6.40. Envolvente de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	93
6.41. Distribución de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	94
6.42. Distribución de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	94
6.43. Distribución de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	95
6.44. Distribución de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	95
6.45. Distribución de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	96
6.46. Distribución de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	96
6.47. Envolvente de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	97
6.48. Envolvente de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	97
6.49. Envolvente de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.	98
6.50. Envolvente de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	98
6.51. Envolvente de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	99
6.52. Envolvente de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos triangulares.	99
A.1. Coordenadas naturales en un elemento triangular	104
A.2. Relación entre sistema de referencia cartesiano local y global.	109
B.1. Espectro de aceleraciones del registro vertical del terremoto 27/02/2010.	111
B.2. Ubicación de los periodos fundamentales T_1 y T_2 de las losas N°1 y N°2 en el espectro del registro vertical de aceleración.	112

Índice de tablas

1.1. Registro de aceleraciones máximas del Servicio Sismológico de Chile. <i>Fuente: [11].</i>	5
4.1. Tabla inputs necesarios para utilizar el programa en el caso estático.	52
4.2. Tabla inputs necesarios para utilizar el programa en el caso estático.	54
4.3. Tabla inputs necesarios para utilizar el programa en el caso dinámico.	56
4.4. Comparación de frecuencias naturales en $[\frac{rad}{s}]$ para una losa de $1[m] \times 1[m]$ para distintas discretizaciones.	56
4.5. Comparación de frecuencias naturales en $[\frac{rad}{s}]$ para una losa de $6[m] \times 6[m]$ para distintas discretizaciones.	57
4.6. Comparación de frecuencias naturales en $[\frac{rad}{s}]$ para una losa de $12[m] \times 12[m]$ para distintas discretizaciones.	57
4.7. Propiedades del oscilador utilizado en la validación.	58
6.1. Tabla inputs necesarios para ejecutar el programa.	68
6.2. Tabla inputs necesarios para ejecutar el programa.	71
6.3. Tabla inputs necesarios para obtener la envolvente de tensiones.	77
6.4. Propiedades de la losa.	83
6.5. Carga estática utilizada en el análisis.	85

Nomenclatura

- a : Longitud del lado de una placa cuadrada, en m .
- α : Ángulo de fase, en rad .
- A : Matriz de coeficientes del polinomio de interpolación del elemento MZC.
- A_e : Área elemental del elemento MZC y/o DKT, en m^2 .
- $\{a\}$: Vector de formas modales.
- b : Longitud del lado de una placa cuadrada, en m .
- B_f : Matriz de flexión.
- C : Amortiguación del oscilador de un grado de libertad, en $\frac{Ns}{m}$.
- $[C]$: Matriz de amortiguación, en $\frac{Ns}{m}$.
- c_n : Coeficiente de amortiguación, en $\frac{Ns}{m}$.
- \hat{D}_f : Matriz constitutiva, en $\frac{N}{m^2}$.
- \bar{D}_f : Rigidez flexural de una placa, en $\frac{N}{m^2}$.
- E : Módulo de elasticidad, en $\frac{N}{m^2}$.
- ε_c : Deformación provocada por esfuerzos de corte.
- ε_f : Deformación provocada por esfuerzos de flexión.
- ε_x : Deformación en el eje x .
- ε_y : Deformación en el eje y .
- ε_z : Deformación en el eje z .
- $\{\varepsilon\}$: Vector de deformaciones.
- $F(t)$: Fuerza de magnitud variable en el tiempo, en N.
- ϕ_{ij} : Coeficientes de la matriz modal.
- ϕ_x : Giro adicional de la normal (Teoría de Reissner-Mindlin), en rad .

ϕ_y	: Giro adicional de la normal (Teoría de Reissner-Mindlin), en <i>rad</i> .
$\{F(t)\}$: Vector de fuerzas de magnitud variable en el tiempo, en <i>N</i> .
$[\phi]$: Matriz modal.
g	: Aceleración de gravedad, en $\frac{m}{s^2}$.
\ddot{g}	: Segunda derivada del desplazamiento modal, en $\frac{m}{s^2}$.
Γ_i	: Factor de participación modal, en <i>kg</i> .
γ_{xy}	: Deformación por corte en los planos <i>xy</i> .
γ_{xz}	: Deformación por corte en los planos <i>xz</i> .
γ_{yz}	: Deformación por corte en los planos <i>yz</i> .
$[I]$: Matriz identidad.
K	: Rigidez del oscilador de un grado de libertad, en $\frac{N}{m^2}$.
$K_{dkt}^{(e)}$: Matriz de rigidez elemental del elemento DKT.
$K_{mzc}^{(e)}$: Matriz de rigidez elemental del elemento MZC.
λ	: Parámetro del Método de Newmark.
M	: Masa del oscilador de un grado de libertad, en <i>kg</i> .
$M_{dkt}^{(e)}$: Matriz de masa elemental del elemento DKT.
$M_{mzc}^{(e)}$: Matriz de masa elemental del elemento MZC.
M_x	: Momento con respecto al eje <i>y</i> , en <i>Nm</i> .
M_{xy}	: Momento sobre el plano <i>xy</i> , en <i>Nm</i> .
M_y	: Momento con respecto al eje <i>x</i> , en <i>Nm</i> .
μ	: Parámetro del Método de Newmark.
$[N]$: Matriz de las funciones de forma.
ν	: Modulo de Poisson.
$P(t)$: Fuerza modal, en <i>N</i> .
q	: Fuerza vertical uniforme sobre la losa o placa, en $\frac{N}{m^2}$.
Q_x	: Fuerza vertical repartida sobre la losa, en $\frac{N}{m}$.
Q_y	: Fuerza vertical repartida sobre la losa, en $\frac{N}{m}$.
θ_x	: Ángulo de giro de la normal con respecto al eje <i>x</i> , en <i>rad</i> .
θ_y	: Ángulo de giro de la normal con respecto al eje <i>y</i> , en <i>rad</i> .

- r : Radio de una losa o placa circular, en m .
- ρ : Densidad, en $\frac{Kg}{m^3}$.
- σ_c : Tensión por corte, en $\frac{N}{m^2}$.
- σ_f : Tensión por flexión, en $\frac{N}{m^2}$.
- σ_x : Tensión de tracción o compresión en eje x , en $\frac{N}{m^2}$.
- σ_y : Tensión de tracción o compresión en eje y , en $\frac{N}{m^2}$.
- t : Espesor de la losa, en m .
- τ_{xy} : Tensión de corte sobre el plano xy , en $\frac{N}{m^2}$.
- u : Desplazamiento relativo, en m .
- U : Energía de deformación, en Nm .
- \dot{u} : Primera derivada con respecto al tiempo del desplazamiento relativo, en $\frac{m}{s}$.
- $\{u\}$: Vector de desplazamientos relativos, en m .
- V : Volumen, en m^3 .
- ω_0 : Frecuencia de la fuerza externa, en $\frac{Rad}{s}$.
- $[\Omega]$: Matriz del cuadrado de las frecuencias naturales, en $\frac{Rad^2}{s^2}$.
- ξ : Coeficiente de amortiguación.
- $\{Y\}$: Vector de desplazamientos, en m .
- $\{\ddot{Y}\}$: Vector aceleración, en $\frac{m}{s^2}$.
- y : Coordenada de desplazamiento, en m .
- \dot{y} : Primera derivada de la coordenada de desplazamiento, en $\frac{m}{s}$.
- \ddot{y} : Segunda derivada de la coordenada de desplazamiento, en $\frac{m}{s^2}$.
- $\{y\}$: Vector de coordenadas de desplazamiento, en m .
- z : Coordenada de desplazamiento modal, en m .
- \dot{z} : Primera derivada de la coordenada de desplazamiento modal, en $\frac{m}{s}$.
- \ddot{z} : Segunda derivada de la coordenada de desplazamiento modal, en $\frac{m}{s^2}$.
- $\{z\}$: Vector de desplazamientos modales, en m .

Capítulo 1

Introducción

1.1. Generalidades

A lo largo de la Historia, Chile se ha caracterizado por ser uno de los países con mayor frecuencia de episodios sísmicos, prueba de ello, se cuenta con un nutrido historial de terremotos. Sólo en el siglo pasado se contabilizaron 13 de ellos, entre los que se encuentra el terremoto de Chillán en Enero de 1939, el cual tuvo una magnitud de 8.3° Richter, Valdivia en Mayo de 1960 con una magnitud de 9.5° Richter y finalmente San Antonio, en Marzo de 1985 que en cual se registraron 8.0° Richter.

En la madrugada del pasado 27 de Febrero del 2010, el centro sur de Chile fue sacudido, nuevamente, por un fuerte terremoto de magnitud 8.8° Richter, el cual vino acompañado de un tsunami que afectó la costa desde Pichilemu hasta la Península de Arauco. Dentro de las ciudades afectadas por el sismo, se encuentran Santiago, Rancagua, Talca y Concepción, siendo esta última una de las más afectadas. Algunos edificios que colapsaron en esta ciudad se pueden ver en las siguientes imágenes:

1.1. GENERALIDADES



(a)



(b)

Figura 1.1: a) Edificio Alto Río, Concepción. *Fuente:* <http://www.farm3.static.flickr.com>. b) Torre O'Higgins, Concepción. *Fuente:* <http://www.miradas.com>.

De las imágenes anteriores, se puede inferir que estas estructuras estuvieron sometidas a grandes deformaciones durante el terremoto, las cuales sobrepasaron el límite elástico, originando la falla de importantes elementos estructurales y por lo tanto el colapso de la estructura.

Dentro de los elementos estructurales que fallaron por la acción de este terremoto se encuentran las losas de hormigón armado, en las cuales se presentaron fisuras, algunas de estas fallas se muestran en las siguientes fotografías:

1.1. GENERALIDADES



Figura 1.2: Daños en losa a nivel de esquinas de muro. *Fuente: Inspección Post Sismo del 27 de Febrero del 2010 Edificio Don Manuel, realizada por Idiem.*



Figura 1.3: Daños en losa cercana a muros. *Fuente: <http://www.reclamos.cl>.*

1.1. GENERALIDADES



Figura 1.4: Daños en losa cercana a muros. *Fuente: Universidad Católica de la Santísima Concepción.*



Figura 1.5: Daños en losa cercana a muros. *Fuente: Universidad Católica de la Santísima Concepción.*

Este terremoto se caracterizó por su alta aceleración vertical, ya que en algunos lugares

1.1. GENERALIDADES

alcanzó valores muy similares a la componente horizontal. La red sismológica de Chile presentó el siguiente registro de aceleración.

Localidad	Aceleración Máx. Horizontal NS	Aceleración Máx. Horizontal EW	Aceleración Máx. Vertical
Colegio San Pedro, Concepción	0.65g	0.61g	0.58g
Cerro Calán, Santiago	0.20g	0.23g	0.11g
Campus Antumapu, Santiago	0.23g	0.27g	0.17g
Cerro El Roble	0.19g	0.13g	0.11g
Melipilla	0.57g	0.78g	0.39g
Olmué	0.35g	0.25g	0.15g
Casablanca	0.29g	0.33g	0.23g
San Jose de Maipo	0.47g	0.48g	0.24g
Colegio Las Américas	0.31g	0.23g	0.16g
Cerro Santa Lucia	0.24g	0.34g	0.24g

Tabla 1.1: Registro de aceleraciones máximas del Servicio Sismológico de Chile. *Fuente: [11].*

Si se tiene en cuenta la información anterior, específicamente en la ciudad de Concepción, se puede ver que las aceleraciones máximas tanto horizontal como vertical son muy similares.

Estos altos valores de aceleración vertical merecen un estudio especial respecto a la respuesta que pueden originar en la superestructura. Resalta la necesidad que las recomendaciones dadas por los códigos de diseño sismorresistente consideren la componente vertical dentro del terremoto de diseño.

De la norma sísmica chilena Nch 433 Of96 [12], la cual rige el diseño sismorresistente en Chile, se puede desprender que las solicitaciones sísmicas relevantes en el diseño estructural provienen solamente de aceleraciones horizontales, ya que sólo ésta, determina esfuerzos y desplazamientos.

En consecuencia, el efecto que puede provocar la aceleración vertical sobre la superestructura y sus elementos estructurales debe ser estudiado por algún método conveniente. De este modo, en este trabajo se ha modelado la respuesta dinámica vertical de una losa de hormigón armado, producto de la aplicación de un registro sísmico de aceleraciones verticales, a través de un software que incorpora el Método de los Elementos Finitos desarrollado en lenguaje MATLAB.

1.2. Objetivos

Desarrollar un programa computacional capaz de modelar la respuesta vertical de losas producto de un terremoto vertical.

1.3. Objetivos específicos

1. Desarrollar un programa que permita realizar un análisis estructural de la losa sometida bajo cargas estáticas, el cual debe entregar desplazamientos y tensiones.
2. Implementar un programa que permita realizar un análisis inercial de la losa sometida a una aceleración vertical sobre su borde, el cual debe entregar envolventes de tensiones.
3. Desarrollar un programa que permita integrar un registro de aceleraciones verticales aplicadas sobre el borde de la losa, con el fin de obtener las tensiones a la cual se encuentra sometida durante la aplicación del registro.
4. Usar el programa para modelar una losa real, la cual sufrió fallas durante el terremoto del 27 de Febrero del 2010, y comparar con evidencia física.

Capítulo 2

Ecuaciones de movimiento para estructuras modeladas como sistemas con múltiples grados de libertad

2.1. Introducción

En dinámica estructural, el número de coordenadas independientes necesarios para especificar la configuración o posición de un sistema en cualquier instante de tiempo se conoce como el número de grados de libertad. Toda estructura continua tiene un número infinito de grados de libertad, sin embargo, el proceso de selección o idealización de un modelo matemático apropiado permite reducir los grados de libertad a un número discreto y en algunos casos a uno solo [3].

2.2. Ecuación de movimiento para sistemas con un grado de libertad

En la siguiente figura, se muestran algunos ejemplos de estructuras que pueden ser representadas como sistemas de un grado de libertad para el análisis dinámico, es decir, estructuras modeladas como sistemas con una sola coordenada de desplazamiento (y).

2.2. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS CON UN GRADO DE LIBERTAD

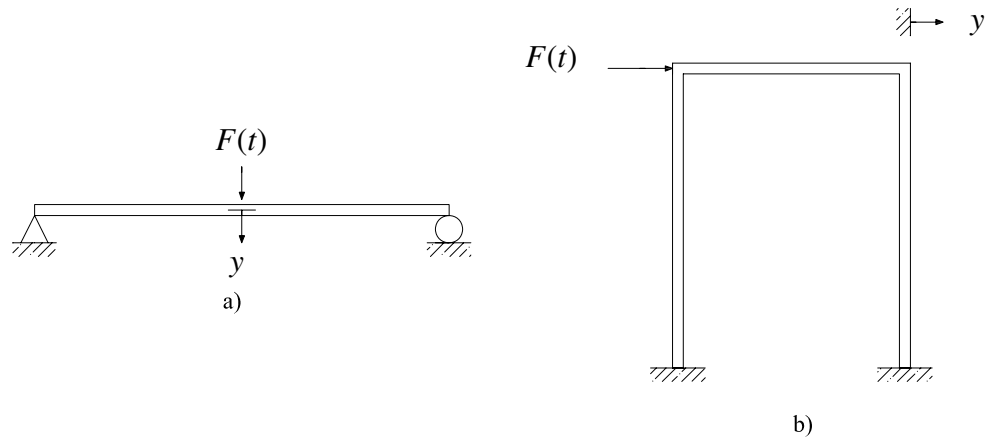


Figura 2.1: Ejemplos de estructuras modeladas con un solo grado de libertad

Estos sistemas con un grado de libertad pueden ser representados convenientemente por el modelo matemático que aparece en la figura 2.2, que tiene los siguientes elementos: (1) un elemento masa, m , que representa la masa o propiedad de inercia de la estructura, (2) un elemento resorte, k , que representa las fuerzas internas del sistema y capacidad de la estructura de almacenar energía potencial, (3) un elemento de amortiguación, c , que representa las características friccionales y las pérdidas de energía de la estructura y (4) la fuerza de excitación $F(t)$, que representa las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema estructural. La fuerza $F(t)$ se escribe en esta forma para indicar que es una función del tiempo.

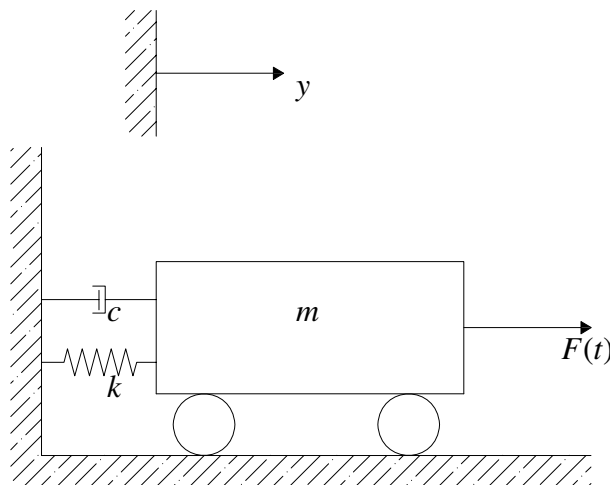


Figura 2.2: Modelo matemático para un sistema con un grado de libertad

Con el objetivo de describir el movimiento del oscilador de la figura, es decir, predecir el desplazamiento y/o la velocidad de la masa m en cualquier instante de tiempo t a partir de las condiciones iniciales dadas en el instante $t = 0$, se debe realizar un diagrama de cuerpo libre de la estructura, en donde se considera *El principio de D'Alembert*, que establece que un sistema puede ser puesto en equilibrio dinámico agregando a las fuerzas externas una fuerza ficticia, comúnmente conocida como fuerza de inercia (ver [3]).

Entonces, si se realiza una sumatoria de fuerzas en el eje y se obtiene:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t) \quad (2.1)$$

La expresión (2.1) es la ecuación de movimiento para un sistema de un solo grado de libertad.

2.3. Ecuación de movimiento para sistemas con múltiples grados de libertad

2.3.1. Estructuras modeladas como edificio simple

Las estructuras no siempre se pueden describir directamente empleando un modelo con un solo grado de libertad, y en general, es necesario modelar las estructuras como sistemas con múltiples grados de libertad, como por ejemplo las denominadas *edificio simple*.

Un edificio simple puede ser definido como un edificio, en la cual, no se producen rotaciones en los elementos horizontales de los pisos, por lo tanto, para conseguir estas deformaciones en el edificio se deben suponer las siguientes condiciones:

1. Toda la masa de la estructura se encuentra concentrada a nivel de los pisos.
2. Las vigas de los pisos son infinitamente rígidas.
3. La deformación de la estructura es independiente de las fuerzas axiales presentes en las columnas.

2.3. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS CON MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

En la siguiente figura se muestra el esquema de un edificio de dos pisos y su correspondiente modelo:

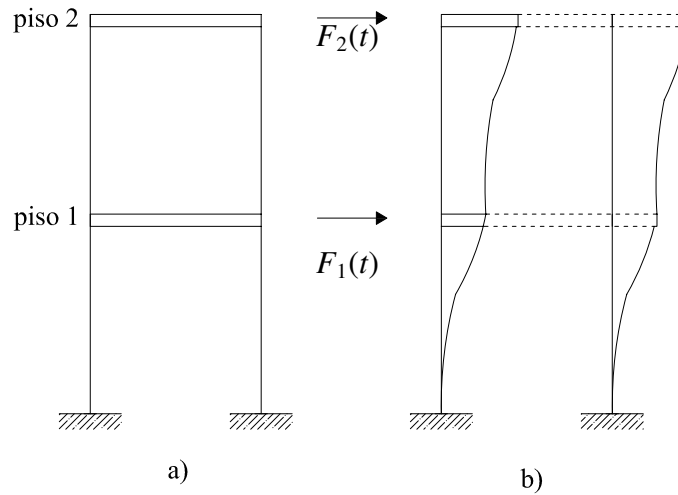


Figura 2.3: a) Esquema de un edificio simple. b) Deformada de un edificio simple.

Para obtener la ecuación de movimiento, se necesita realizar un diagrama de cuerpo libre para cada piso a partir de la siguiente figura:

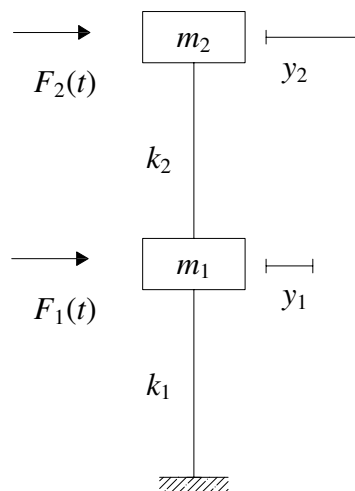


Figura 2.4: Modelo de un edificio simple.

2.3. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS CON MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

Las ecuaciones de movimiento de un edificio simple se obtienen igualando a cero, la suma de las fuerzas que actúan en cada una de las masas, así se tiene:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2) y_1 - k_2 y_2 &= F_1(t) \\ m_2 \ddot{y}_2 - k_2 y_1 + k_2 y_2 &= F_2(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

las ecuaciones (2.2) se pueden escribir como:

$$[M] \{\ddot{Y}\} + [K] \{Y\} = \{\ddot{F}(t)\}, \quad (2.3)$$

donde $[M]$ y $[K]$ son, respectivamente, las matrices de masa y de rigidez dadas por

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

y

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

donde $\{Y\}$, $\{\ddot{Y}\}$, $\{F\}$ son respectivamente, los vectores de desplazamiento, aceleración y fuerza dados por

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} ; \quad \ddot{Y} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} ; \quad F = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Cabe destacar, que la ecuación (2.3) no solo es la ecuación de movimiento de un *edificio simple*, sino que también es la ecuación que describe el movimiento de estructuras con múltiples grados de libertad.

2.3.2. Vibración libre de estructuras con múltiples GDL

Cuando en una estructura no existen excitaciones externas, fuerzas o desplazamientos del apoyo, y su movimiento se encuentra gobernado solamente por las condiciones iniciales, se considera que está en vibración libre. El análisis de las estructuras en movimiento libre proporciona las propiedades dinámicas más importantes de la estructura, las cuales son las frecuencias naturales y los correspondientes modos normales de vibración.

2.3.2.1. Frecuencias naturales y modos normales

La ecuación a resolver es:

$$[M] \{\ddot{Y}\} + [K] \{Y\} = \{0\}. \quad (2.7)$$

Para la vibración libre de una estructura sin amortiguación, se buscan soluciones de la forma

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 \text{sen}(\omega t - \alpha) \\ y_2 &= a_2 \text{sen}(\omega t - \alpha) \\ &\vdots \\ y_n &= a_n \text{sen}(\omega t - \alpha) \end{aligned} \quad (2.8)$$

o si se usa notación matricial

$$\{Y\} = \{a\} \text{sen}(\omega t - \alpha), \quad (2.9)$$

donde a_k es la amplitud del movimiento de la coordenada k y n es el número de grados de libertad. La aplicación de la ecuación (2.9) en la ecuación (2.7) se escribe

$$-\omega^2 [M] \{a\} \text{sen}(\omega t - \alpha) + [K] \{a\} \text{sen}(\omega t - \alpha) = \{0\}. \quad (2.10)$$

luego, reordenando los términos, se obtiene

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{a\} = \{0\}, \quad (2.11)$$

que, en el caso general, es un sistema algebraico de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas y amplitudes a_k , además de un parámetro ω^2 por determinar. La formulación de la ecuación (2.11) es un importante problema matemático conocido como problema característico. Su solución no trivial requiere que el determinante de la matriz $[K] - \omega^2 [M]$ sea igual a cero, es decir,

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0. \quad (2.12)$$

En general, la ecuación (2.12), resulta ser una ecuación algebraica de grado n de la incógnita ω^2 , la cual se satisface para n valores de ω^2 . Para cada valor de ω^2 que satisface la ecuación (2.12), se puede resolver la ecuación (2.11) para a_1, a_2, \dots, a_n , en términos de una constante de proporcionalidad arbitraria, lo que conlleva a obtener una sucesión de vectores $\{a\}_i$, la

2.3. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS CON MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

cual, cada uno corresponde a un valor de ω_i^2 . Estos vectores son los modos normales de vibración (vectores característicos o autovectores) del sistema dinámico y cada valor ω_i son las frecuencias naturales de vibración (valores característicos o autovalores) del sistema dinámico. La ordenación en una matriz de los modos normales constituye la matriz modal $[\phi]$ del sistema. Es conveniente normalizar los vectores característicos o vectores de modos normales para hacerlos satisfacer la siguiente condición:

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.13)$$

Así, los vectores característicos (modos normales), satisfacen las importantes condiciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned} \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j &= 0, \text{ para } i \neq j & \text{y} & & \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j &= 0, \text{ para } i \neq j \\ \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j &= 1, \text{ para } i = j & & & \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j &= \omega_i^2, \text{ para } i = j. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Estas relaciones de ortogonalidad son equivalentes a

$$[\phi]^T [M] [\phi] = [I] \quad \text{y} \quad [\phi]^T [K] [\phi] = [\Omega], \quad (2.15)$$

donde $[\phi]$ es la matriz modal del sistema y $[\Omega]$ es una matriz diagonal que contiene los valores característicos ω_i^2 en la diagonal principal.

2.3.2.2. Método de superposición modal

El movimiento libre de un sistema dinámico puede expresarse en función de los modos normales de vibración, es decir, se puede mostrar que los modos normales pueden ser usados para transformar un sistema de ecuaciones diferenciales con ecuaciones acopladas en un nuevo conjunto de ecuaciones diferenciales desacopladas, en el que cada ecuación contiene una sola variable dependiente. Por lo tanto el método de superposición modal reduce el problema de encontrar la respuesta de un sistema con múltiples grados de libertad a la determinación de las respuestas de sistemas con un solo grado de libertad.

El sistema de ecuaciones (2.2) es un sistema acoplado, por lo que se hace necesario transformarlo en un sistema desacoplado, expresando la solución de las ecuaciones (2.2) en función de los modos normales multiplicados por coeficientes que determinan la contribución de cada modo, estos factores son funciones generales del tiempo $z_i(t)$. Por lo tanto, la solución de las ecuaciones (2.2) son de la siguiente forma:

2.3. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS CON MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \phi_{11}z_1(t) + \phi_{12}z_2(t) \\ y_2(t) &= \phi_{21}z_1(t) + \phi_{22}z_2(t), \end{aligned} \quad (2.16)$$

o bien

$$\{y\} = [\phi]\{z\}. \quad (2.17)$$

Si se introduce la ecuación (2.17) en (2.3), se obtiene

$$[M][\phi]\{\ddot{z}\} + [K][\phi]\{z\} = \{F(t)\}. \quad (2.18)$$

Multiplicando la ecuación (2.18) por $[\phi]^T$ se tiene

$$[\phi]^T[M][\phi]\{\ddot{z}\} + [\phi]^T[K][\phi]\{z\} = [\phi]^T\{F(t)\}. \quad (2.19)$$

Las condiciones de ortogonalidad entre los modos normales (ecuaciones (2.14)) implican que

$$[\phi]^T[M][\phi] = [I] \quad (2.20)$$

y

$$[\phi]^T[K][\phi] = [\Omega]. \quad (2.21)$$

Por lo tanto, la ecuación (2.19) puede ser escrita como

$$\ddot{z}_i + \omega_i^2 z_i = P_i(t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.22)$$

donde la fuerza modal $P_i(t)$ se encuentra dada por

$$P_i(t) = \phi_{1i}F_1(t) + \phi_{2i}F_2(t) + \dots + \phi_{Ni}F_N(t). \quad (2.23)$$

2.3.3. Respuesta de un edificio al movimiento de la base

Las ecuaciones de movimiento para un edificio simple de n pisos como el de la figura 2.5, sometido a una aceleración basal, se obtienen igualando a cero la suma de las fuerzas que actúan en cada piso, estas son

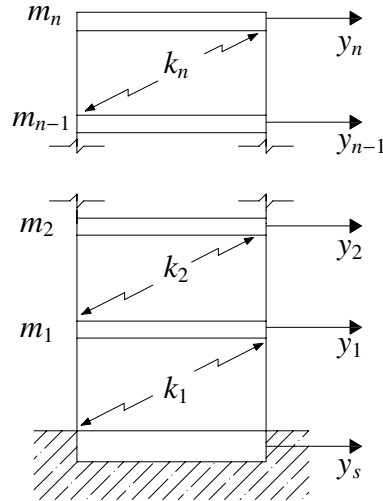


Figura 2.5: Modelo de edificio simple excitado en su base.

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{y}_1 + k_1 (y_1 - y_s) - k_2 (y_2 - y_1) &= 0 \\
 m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) - k_3 (y_3 - y_2) &= 0 \\
 &\vdots \\
 m_{n-1} \ddot{y}_{n-1} + k_{n-1} (y_{n-1} - y_{n-2}) - k_n (y_n - y_{n-1}) &= 0 \\
 m_n \ddot{y}_n + k_n (y_n - y_{n-1}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Se introduce en la ecuación (2.24)

$$u_i = y_i - y_s \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.25}$$

lo que da por resultado

2.3. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS CON MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 - k_2 (u_2 - u_1) &= -m_1 \ddot{y}_s \\
 m_2 \ddot{u}_2 + k_2 u_2 - k_3 (u_3 - u_2) &= -m_2 \ddot{y}_s \\
 &\vdots \\
 m_{n-1} \ddot{u}_{n-1} + k_{n-1} (u_{n-1} - u_{n-2}) - k_n (u_n - u_{n-1}) &= -m_{n-1} \ddot{y}_s \\
 m_n \ddot{u}_n + k_n (u_n - u_{n-1}) &= -m_n \ddot{y}_s.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Las ecuaciones (2.26) se pueden expresar en notación matricial como

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\{1\}\ddot{y}_s(t), \tag{2.27}$$

donde $[M]$ es la matriz de masa, $[K]$ es la matriz de rigidez, $\{1\}$ es un vector con todos sus elementos igual a 1, $\ddot{y}_s = \ddot{y}_s(t)$ es la aceleración aplicada a la fundación del edificio; y $\{u\}$ y $\{\ddot{u}\}$ son, respectivamente, los vectores del desplazamiento y de la aceleración relativos al movimiento de la fundación.

Como se ha demostrado, el sistema de ecuaciones diferenciales (2.24) puede ser desacoplado mediante la siguiente transformación

$$\{u\} = [\phi]\{z\}. \tag{2.28}$$

La aplicación de la ecuación (2.28) en la ecuación (2.27) seguida por la premultiplicación de la matriz de modos normales $[\phi]^T$, da por resultado

$$[\phi]^T [M] [\phi] \{\ddot{z}\} + [\phi]^T [K] [\phi] \{z\} = -[\phi]^T [M] \{1\} \ddot{y}_s(t). \tag{2.29}$$

Después de introducir en la ecuación (2.29) el método de superposición modal (ecuaciones (2.20) y (2.21)), se obtienen las siguientes ecuaciones modales

$$\ddot{z}_i + \omega_i^2 z_i = \Gamma_i \ddot{y}_s(t) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{2.30}$$

donde el factor de participación modal Γ_i , está dado por

$$\Gamma_i = - \sum_{j=1}^n m_j \phi_{ji} \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \tag{2.31}$$

Si se define la ecuación

$$z_i = \Gamma_i g_i, \tag{2.32}$$

2.3. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS CON MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

Ahora, si se introduce la ecuación (2.32) en la ecuación (2.30) se obtiene

$$\ddot{g}_i + \omega_i^2 g_i = \ddot{y}_s(t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.33)$$

La ecuación (2.33) corresponde a la ecuación modal de movimiento de un edificio simple sin amortiguación con movimiento en su base, por lo que la resolución de ésta, sólo proporciona los desplazamientos modales g_i del edificio. Para encontrar el vector de desplazamientos relativos $\{u\}$ del edificio, primero se hace necesario obtener el vector de desplazamientos modales $\{z\}$ y luego utilizar la ecuación (2.28).

2.3.4. Respuesta de un edificio simple con amortiguación al movimiento de la base

La consideración de la amortiguación en el análisis dinámico de estructuras complica el problema, ya que no sólo las ecuaciones diferenciales del movimiento tienen términos adicionales debido a las fuerzas de amortiguación, sino que, para que se logre que las ecuaciones se desacoplen mediante una transformación de coordenadas, se hace necesario imponer ciertas restricciones sobre los coeficientes de amortiguación. La amortiguación que existe en una estructura es relativamente pequeña y no se afecta el cálculo de las frecuencias naturales de los modos normales, por lo que en la práctica, el problema característico de una estructura amortiguada se resuelve omitiendo la amortiguación y usando los mismos métodos empleados en las estructuras sin amortiguación.

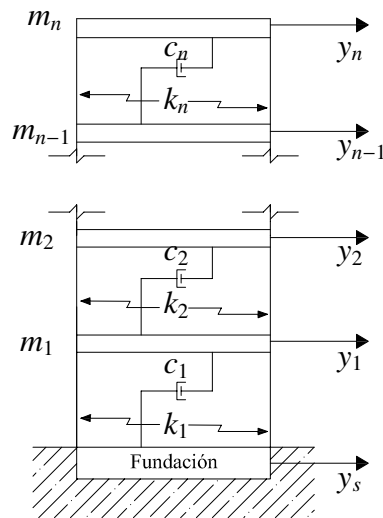


Figura 2.6: Modelo de edificio simple con amortiguación excitado en su base

De la figura 2.6 se puede establecer el siguiente equilibrio de fuerzas:

2.3. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS CON MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{y}_1 + c_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_s) + k_1 (y_1 - y_s) - c_1 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - k_2 (y_2 - y_1) &= 0 \\
 m_2 \ddot{y}_2 + c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2 (y_2 - y_1) - c_1 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) - k_3 (y_3 - y_2) &= 0 \\
 &\vdots \\
 m_{n-1} \ddot{y}_{n-1} + c_{n-1} (\dot{y}_{n-1} - \dot{y}_{n-2}) + k_{n-1} (y_{n-1} - y_{n-2}) - c_n (\dot{y}_n - \dot{y}_{n-1}) - k_n (y_n - y_{n-1}) &= 0 \\
 m_n \ddot{y}_n + c_n (\dot{y}_n - \dot{y}_{n-1}) + k_n (y_n - y_{n-1}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Se introducen en la ecuación (2.34)

$$\begin{aligned}
 u_i &= y_i - y_s \\
 \dot{u}_i &= \dot{y}_i - \dot{y}_s
 \end{aligned} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.35}$$

lo que da por resultado

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{u}_1 + c_1 \dot{u}_1 + k_1 u_1 - c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) - k_2 (u_2 - u_1) &= -m_1 \ddot{y}_s \\
 m_2 \ddot{u}_2 + c_2 \dot{u}_2 + k_2 u_2 - c_3 (\dot{u}_3 - \dot{u}_2) - k_3 (u_3 - u_2) &= -m_2 \ddot{y}_s \\
 &\vdots \\
 m_{n-1} \ddot{u}_{n-1} + c_{n-1} (\dot{u}_{n-1} - \dot{u}_{n-2}) + k_{n-1} (u_{n-1} - u_{n-2}) - c_n (\dot{u}_n - \dot{u}_{n-1}) - k_n (u_n - u_{n-1}) &= -m_{n-1} \ddot{y}_s \\
 m_n \ddot{u}_n + c_n (\dot{u}_n - \dot{u}_{n-1}) + k_n (u_n - u_{n-1}) &= -m_n \ddot{y}_s.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Las ecuaciones (2.36) se pueden expresar matricialmente como

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\{1\}\ddot{y}_s(t) \tag{2.37}$$

donde $[C]$ es la matriz de amortiguación, dada por

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \dots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & c_{n-1} + c_n \end{bmatrix}. \tag{2.38}$$

Los coeficientes que componen la matriz de amortiguación no pueden ser obtenidos explícitamente, debido a esto se incorporan en las ecuaciones de movimiento solo a nivel

2.3. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS CON MÚLTIPLES GRADOS DE LIBERTAD

modal (ver [3]).

El sistema de ecuaciones (2.37) puede ser desacoplado mediante la ecuación (2.28), donde $[\phi]$ es la matriz modal obtenida en la solución del sistema de vibración libre sin amortiguación. Con la aplicación de la ecuación (2.28) en la ecuación (2.37) seguida por la premultiplicación por el vector modal i transpuesto, $\{\phi\}_i^T$ se obtiene

$$[\phi]^T [M] [\phi] \{\ddot{z}\} + [\phi]^T [C] [\phi] \{\dot{z}\} + [\phi]^T [K] [\phi] \{z\} = -[\phi]^T [M] \{1\} \ddot{y}_s(t). \quad (2.39)$$

Debido a las propiedades de ortogonalidad se sigue

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = 0, \text{ para } i \neq j \quad \text{y} \quad \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = 0, \text{ para } i \neq j. \quad (2.40)$$

Análogamente se supone que

$$\{\phi\}_i^T [C] \{\phi\}_j = 0, \text{ para } i \neq j \quad \text{y} \quad \{\phi\}_i^T [C] \{\phi\}_i = c_i, \text{ para } i \neq j. \quad (2.41)$$

Entonces la ecuación (2.39) se puede escribir

$$\ddot{z}_i + c_i \dot{z}_i + \omega_i^2 z_i = \Gamma_i \ddot{y}_s(t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.42)$$

o alternativamente como

$$\ddot{z}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{z}_i + \omega_i^2 z_i = \Gamma_i \ddot{y}_s(t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.43)$$

Si se introduce el cambio de variables dado por las ecuaciones (2.32) se obtiene

$$\ddot{g}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{g}_i + \omega_i^2 g_i = \ddot{y}_s(t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (2.44)$$

donde ξ_i , ω_i son el coeficiente de amortiguación y frecuencia natural de cada modo de vibrar respectivamente, al igual que \ddot{g}_i , \dot{g}_i y g_i son la aceleración, velocidad y desplazamiento de cada modo y $\ddot{y}_s(t)$ es la aceleración del suelo o la base (ver [3]).

Es posible obtener una solución analítica de la ecuación (2.44), sólo cuando el término $\ddot{y}_s(t)$ corresponde a una aceleración del suelo sinusoidal (ver [3]). Sin embargo lo anterior no siempre es posible, debido a que los registros de aceleraciones de terremotos no son sinusoidales, por lo tanto, para resolver la ecuación (2.44) se hace necesario utilizar un método numérico, en este caso se ha utilizado el Método de Newmark (1965).

2.3.4.1. Método de Newmark

Este método puede ser utilizado para resolver ecuaciones de movimiento para sistemas de múltiples grados de libertad, sin embargo, la formulación que se ha implementado corresponde a la de estructuras de un grado de libertad. Como la ecuación de movimiento que se requiere resolver es la (2.37), se hace necesario aplicar el Método de Superposición Modal para desacoplar dicha ecuación, con el fin de obtener una serie de ecuaciones modales de movimiento para un grado de libertad, las cuales se han resuelto mediante el Método de Newmark.

El autor (ver [10]) propone la resolución paso a paso a partir de la ecuación:

$$[M]\ddot{y}_{n+1} + [C]y_{n+1} + [K]y_{n+1} = \{F_{n+1}\}, \quad (2.45)$$

donde se han definido las ecuaciones básicas que modelan la velocidad y desplazamiento respectivamente

$$\dot{y}_{n+1} = \dot{y}_n + ((1 - \lambda)\ddot{y}_n + \lambda\ddot{y}_{n+1}) \Delta t \quad (2.46)$$

$$y_{n+1} = y_n + \dot{y}_n \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \ddot{y}_n + \mu \ddot{y}_{n+1}, \quad (2.47)$$

con $\Delta = t_{n+1} - t_n$, y los parámetros λ y μ tienen un valor de 1/4 y 1/2 respectivamente.

De la ecuación (2.47) se despeja \ddot{y}_{n+1} y se obtiene

$$\ddot{y}_{n+1} = \frac{1}{\mu \Delta t^2} (y_{n+1} - y_n) - \frac{\dot{y}_n}{\mu \Delta} - \left(\frac{1}{2\mu - 1} \right) \ddot{y}_n. \quad (2.48)$$

Reemplazando la ecuación (2.48) y (2.46) en la ecuación de movimiento (2.45) se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{C\lambda}{\Delta t} + \mu K \right) y_{n+1} &= \mu F_{n+1} + \left(\frac{m}{\Delta t} + C(\lambda - \mu) \right) y_n \cdots \\ \cdots + \left(\frac{m}{\Delta t} + C(\lambda - \mu) \right) \dot{y}_n &+ \left(\left(\frac{1}{2} - \mu \right) m + C(\lambda - 2\mu) \frac{\Delta t}{2} \right) \ddot{y}_n. \end{aligned} \quad (2.49)$$

La ecuación (2.49) es la que se utiliza para implementar numéricamente el método, ya que es posible despejar el término y_{n+1} , el cual, en este caso particular, corresponde al desplazamiento modal g_i . Una vez obtenidos los desplazamientos modales g_i se pueden obtener el vector de desplazamientos relativos $\{u\}$ tal como se ha dicho en la sección 2.3.3.

2.4. Ecuación de movimiento de una placa

2.4.1. Deducción de la ecuación diferencial de movimiento de una placa en vibración libre

La ecuación que rige el comportamiento mecánico de una placa, es decir, la forma en que se relacionan las propiedades geométricas y resistentes del material, las cargas aplicadas y la deformación vertical de la losa (flecha), está dada por la ecuación diferencial, que se detalla a continuación.

2.4.1.1. Ecuaciones de equilibrio estático de la placa

Estableciendo el equilibrio de fuerzas en un elemento diferencial de placa (figura 2.7) se deducen las ecuaciones siguientes:

Equilibrio de fuerzas verticales

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + q dx dy = 0, \quad (2.50)$$

de donde, dividiendo por $dx dy$ se tiene

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0. \quad (2.51)$$

Equilibrio de momentos

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0 \Rightarrow & \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx dy \dots \\ & \dots - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dy}{2} + q dx dy \frac{dy}{2} = 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \sum M_y = 0 \Rightarrow & \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dx dy \dots \\ & \dots - \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} + q dx dy \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Despreciando términos de segundo orden, se obtienen

2.4. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE UNA PLACA

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \quad (2.54)$$

y

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0. \quad (2.55)$$

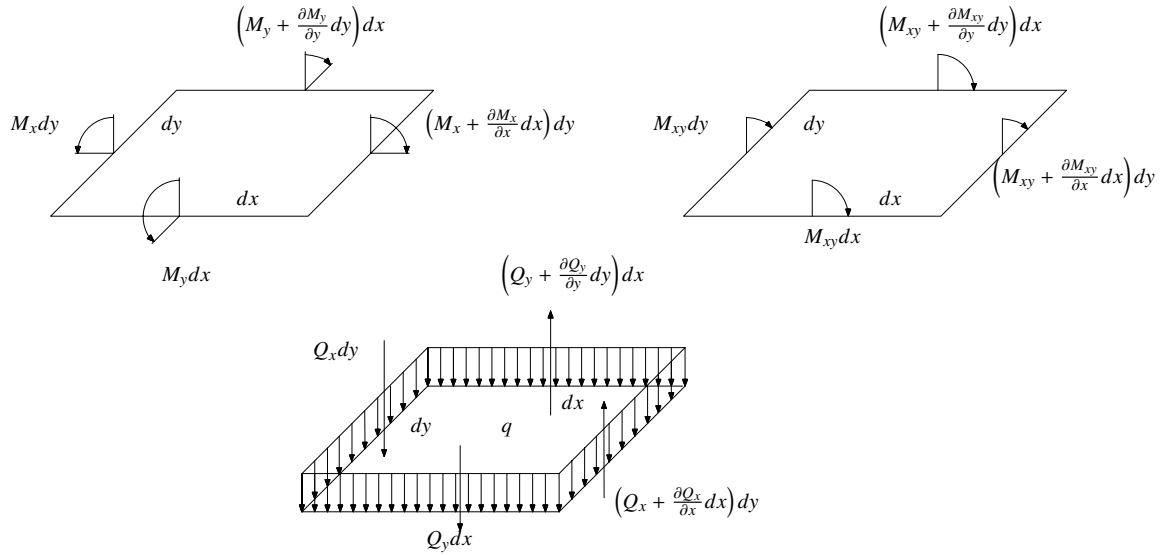


Figura 2.7: Diagrama de cuerpo libre de la placa.

Diferenciando (2.54) y (2.55) con respecto a y y x , respectivamente y sustituyendo en (2.51) se obtiene

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q. \quad (2.56)$$

Por otra parte, para una placa delgada de Kirchhoff el vector (para más detalle ver capítulo 3)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

es el vector de deformaciones independientes de la placa. Dicho vector tiene asociado el

2.4. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE UNA PLACA

correspondiente vector de tensiones

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T. \quad (2.58)$$

Partiendo de la relación general entre tensiones y deformaciones de la elasticidad tridimensional y haciendo uso de que σ_z , γ_{xz} , γ_{yz} son nulas, puede encontrarse una nueva expresión entre las tensiones y deformaciones no nulas. Para material isótropo se tiene

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \varepsilon = D\varepsilon. \quad (2.59)$$

Se define ahora el vector de esfuerzos como

$$\hat{\sigma}_f = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma dz, \quad (2.60)$$

donde M_x , M_y son los momentos flectores de las tensiones σ_x y σ_y con respecto al plano medio, respectivamente y M_{xy} es el momento torsor producido por la tensión tangencial τ_{xy} .

Sustituyendo en (2.60) las relaciones (2.59) y (2.57) se encuentra

$$\hat{\sigma}_f = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z D \varepsilon dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 D \hat{\varepsilon}_f dz = \hat{D}_f \hat{\varepsilon}_f, \quad (2.61)$$

donde

$$\hat{D}_f = \frac{t^3}{12} D \quad (2.62)$$

es la matriz constitutiva de flexión, y

$$\hat{\varepsilon}_f = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (2.63)$$

es el vector de deformaciones generalizadas de flexión o vector de curvaturas.

Finalmente, reemplazando (2.59), (2.62) y (2.63) en (2.61) se tiene

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = -\frac{t^3}{12} \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

2.4. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE UNA PLACA

Desarrollando la ecuación (2.64) y diferenciando M_x dos veces con respecto a x , M_y dos veces con respecto a y , y M_{xy} con respecto a x y a y , y reemplazando en (2.56) se tiene

$$\bar{D}_f \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -q, \quad (2.65)$$

que es una ecuación diferencial (ecuación de Lagrange) de cuarto orden que relaciona la flecha con la carga repartida y las propiedades del material.

El parámetro \bar{D}_f se denomina Rigidez flexural de la Placa y su expresión está dada por:

$$\bar{D}_f = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (2.66)$$

donde E es el Módulo de Young (Módulo de Elasticidad), ν es la relación de Poisson, t es el espesor, q es la carga repartida y w es la deformación vertical de la placa.

2.4.1.2. Ecuaciones de movimiento en vibración libre de una placa

De acuerdo con el *Principio de D'Alembert* (ver [3]) (agregando las fuerzas de inercia), las ecuaciones de equilibrio para la placa de la figura 2.7 son las siguientes:

Equilibrio de fuerzas verticales

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + q dx dy + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx dy = 0. \quad (2.67)$$

Dividiendo por $dx dy$ se tiene

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2.68)$$

donde \bar{m} es la masa por unidad de superficie de la placa.

Equilibrio de momentos

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0 \Rightarrow & \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx dy \dots \\ & \dots - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dy}{2} + q dx dy \frac{dy}{2} = 0, \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \sum M_y = 0 \Rightarrow & \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dx dy \dots \\ & \dots - \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} + q dx dy \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Despreciando términos de segundo orden en (2.69) y (2.70), se obtienen

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \quad (2.71)$$

y

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0. \quad (2.72)$$

Diferenciando (2.71) y (2.72) con respecto a y y x , respectivamente y sustituyendo en (2.51) se obtiene

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q. \quad (2.73)$$

Por otra parte, si se considera la ecuación (2.64) se obtiene

$$\hat{D}_f \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q. \quad (2.74)$$

La ecuación (2.74) es la misma que la ecuación (2.65), exceptuando el término adicional correspondiente a la fuerza inercial.

La ecuación (2.74) es la que se ha resuelto mediante el Método de los Elementos Finitos. En el capítulo 3, se ha presentado la formulación de elementos finitos de una placa, la cual ha sido utilizada para resolver la ecuación (2.74). La aplicación del Método de Elementos Finitos a la ecuación (2.74), es decir discretizar la losa, genera las matrices de rigidez y masa de ésta. Finalmente, si se agrega la amortiguación, se obtiene la respuesta dinámica de una

2.4. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE UNA PLACA

losa sometida a aceleraciones verticales aplicadas sobre su borde.

Capítulo 3

Formulación de Elementos Finitos

3.1. Esfuerzos de flexión: Teoría de placas de Kirchhoff

3.1.1. Estado de placa

Se define como placa al sólido paralelepípedo en el que una de sus dimensiones (espesor) es mucho más pequeña que las otras dos. La superficie plana equidistante de las caras de mayores dimensiones se denomina plano medio de la placa. Por otra parte se define como *estado de placa* al estado de cargas en el que sólo actúan como cargas exteriores fuerzas normales al plano medio y momentos cuyos ejes están contenidos en dicho plano (figura 3.1).

3.1.2. Hipótesis fundamentales

Las hipótesis sobre las que se basa la teoría de placas de Kirchhoff son las siguientes:

1. En los puntos del plano medio de la placa se tiene:

$$u = v = 0. \quad (3.1)$$

Es decir, los puntos del plano medio sólo se mueven verticalmente.

2. Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio tienen el mismo desplazamiento vertical.
3. La tensión normal σ_z es despreciable.

4. Los puntos sobre rectas normales al plano medio antes de la deformación permanecen sobre rectas también ortogonales a la deformada del plano medio después de la deformación.

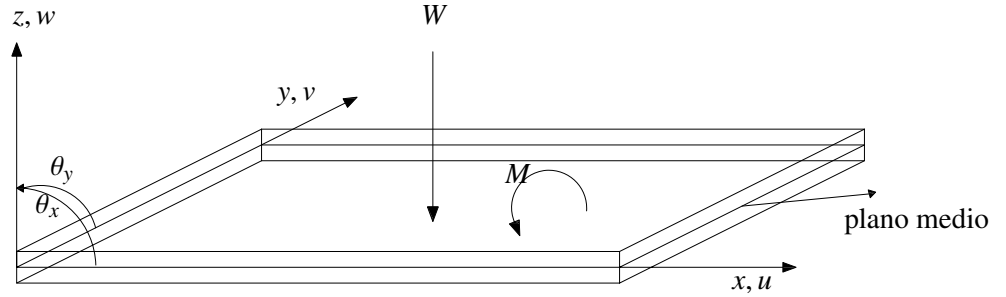


Figura 3.1: Definición geométrica de una placa y convenio de signos para desplazamientos y giros.

3.1.3. Campo de deformaciones

De las hipótesis 1, 2 y 4 anteriores se deduce que:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= -z\theta_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w(x, y), \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde w es el desplazamiento vertical (flecha) de los puntos del plano medio y θ_x y θ_y son los ángulos que definen el giro de la normal (hipótesis 4) contenidos en los planos xz e yz respectivamente. El vector

$$u = \begin{bmatrix} w & \theta_x & \theta_y \end{bmatrix}^T \tag{3.3}$$

se denomina vector de movimientos (contiene los desplazamientos y giros) de un punto del plano medio de la placa.

De la hipótesis 4 y la figura 3.2 se deduce que

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{y} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.4)$$

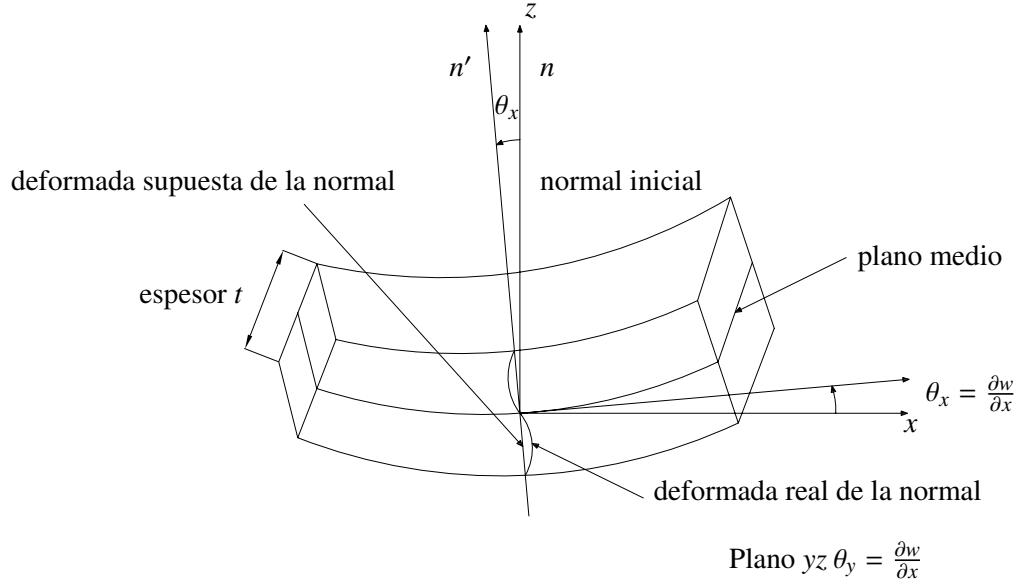


Figura 3.2: Deformación del plano medio de una placa delgada y giro de la normal.

Es decir, los giros de la normal en un punto coinciden con la pendiente del plano medio en ese punto.

Por consiguiente, el campo de desplazamientos de la placa se puede expresar en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w(x, y), \end{aligned} \quad (3.5)$$

y el vector de movimientos de la ecuación (3.3) se escribe como

$$u = \left[w \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T. \quad (3.6)$$

La mayor parte de las teorías de placas se basan en la hipótesis de deformación recta de la normal. En realidad esto no es más que una aproximación, pues la sección transversal se distorsiona con la deformación como se muestra en la figura 3.2 y el ángulo θ_x ó θ_y depende de la altura sobre el plano medio. La hipótesis de deformación recta de la normal equivale a suponer un giro medio uniforme para cada normal, lo que evidentemente simplifica el problema.

Hay que añadir que la hipótesis de ortogonalidad de la normal sólo se cumple para placas de pequeño espesor (relación espesor/ancho medio: $\frac{t}{L} < 0,05$).

3.1.4. Campo de deformaciones, tensiones y esfuerzos

De las expresiones de la elasticidad tridimensional y (3.2) se deducen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \varepsilon_z &\approx 0, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0,\end{aligned}\tag{3.7}$$

Se deduce de (3.7) que la cuarta hipótesis de Kirchhoff conduce a que las deformaciones transversales γ_{xz} y γ_{yz} son nulas. Por consiguiente, las tensiones tangenciales transversales no contribuyen a la deformación de la placa. Es interesante destacar que la hipótesis 3, finalmente, conduce a que el trabajo de deformación $\sigma_z \varepsilon_z$ es nulo, por lo que puede prescindirse de la deformación ε_z en el análisis, pudiendo obtenerse su valor *a posteriori* en función de ε_x y ε_y .

Nuevamente, por simplicidad, el vector ε de deformaciones independientes de la placa es

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}.\tag{3.8}$$

Dicho vector tiene asociado el correspondiente vector de tensiones

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T. \quad (3.9)$$

Partiendo de la relación general entre tensiones y deformaciones de la elasticidad tridimensional y haciendo uso de que σ_z , γ_{xz} y γ_{yz} son nulas, puede encontrarse una nueva expresión entre las tensiones y deformaciones no nulas. Para material isótropo se tiene:

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \varepsilon = D\varepsilon. \quad (3.10)$$

Se define ahora el vector de esfuerzos como

$$\hat{\sigma}_f = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma dz, \quad (3.11)$$

donde M_x , M_y son los momentos flectores de las tensiones σ_x y σ_y con respecto al plano medio, respectivamente y M_{xy} es el momento torsor producido por la tensión tangencial τ_{xy} . Para convenio de signos ver la figura 3.3.

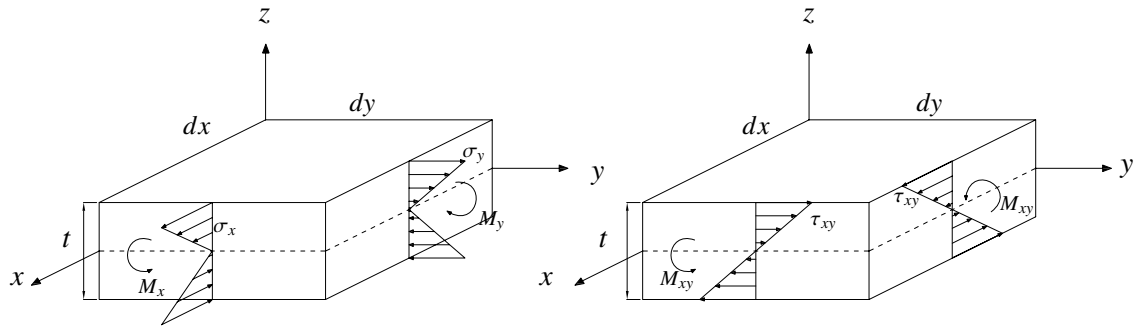


Figura 3.3: Convenio de signos para tensiones y momentos en una placa.

Sustituyendo en (3.11) las relaciones (3.10) y (3.8) se encuentra

$$\hat{\sigma}_f = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z D \varepsilon dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 D \hat{\varepsilon}_f dz = \hat{D}_f \hat{\varepsilon}_f, \quad (3.12)$$

donde

$$\hat{D}_f = \frac{t^3}{12} D \quad (3.13)$$

es la matriz constitutiva de flexión y

$$\hat{\varepsilon}_f = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T, \quad (3.14)$$

es el vector de deformaciones generalizadas de flexión o vector de curvaturas.

Comparando (3.8) con (3.14) se deduce que

$$\varepsilon_f = z \hat{\varepsilon}_f. \quad (3.15)$$

3.1.5. Expresión del Principio de los Trabajos Virtuales

El PTV para el caso de carga repartida de intensidad q y fuerzas puntuales W_i (actuando ambas en dirección del eje z), se escribe para el caso estático

$$\iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \iint_A \delta w q dA + \sum_i \delta w_i W_i \quad (3.16)$$

Las características del problema de flexión de placas permiten simplificar la integral de volumen del trabajo de deformación virtual en otra sobre el plano medio de la placa en función de los esfuerzos y deformaciones generalizadas. Así se tiene

$$\delta U = \iiint_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \iiint_V \left(z \delta \hat{\varepsilon}_f^T \right) \sigma dV = \iint_A \delta \hat{\varepsilon}_f^T \left(\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma dz \right) dA = \iint_A \delta \hat{\varepsilon}_f^T \hat{\sigma}_f dA. \quad (3.17)$$

Por consiguiente, operando con los esfuerzos y deformaciones generalizadas el estudio de un problema de flexión de placas adquiere un carácter bidimensional, ya que todas las integrales y variables del problema son función únicamente de las coordenadas del plano medio de la placa. Es interesante desarrollar (3.17) como

$$\delta U = \iint_A \left(\delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} M_x + \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} M_y + 2\delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} M_{xy} \right) dA. \quad (3.18)$$

En la expresión anterior se aprecia claramente que el trabajo de deformación virtual de la placa puede obtenerse a partir de las contribuciones del trabajo que realizan cada uno de los momentos sobre las curvaturas correspondientes. Asimismo, vemos que en el integrando de (3.18) aparecen derivadas segundas de la flecha, lo que exige que tanto la flecha como su primera derivada sean continuas (continuidad de clase C_1).

3.2. Formulación de Elementos Finitos

La forma intuitiva más sencilla de satisfacer los requisitos de continuidad C_1 para la flecha es tomar la flecha y sus dos giros como variables nodales. Por tanto, en general, tendremos tres variables por nodo w_i , $(\frac{\partial w}{\partial x})_i$ y $(\frac{\partial w}{\partial y})_i$ y el número total de variables de un elemento de n nodos será $3n$. Este número determina la cantidad de términos del polinomio que aproxima w dentro de cada elemento.

Así, pues, en general

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \dots, \quad (3.19)$$

hasta $3n$ términos.

El cálculo de las α_i se efectúa imponiendo las siguientes condiciones en los nodos

$$\begin{aligned} w_i &= (w)_i, \\ \theta x_i &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i, \\ \theta y_i &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i, \end{aligned} \quad (3.20)$$

con $i = 1, 2, 3, \dots, n$, lo que proporciona $3n$ ecuaciones.

El problema fundamental reside en la selección adecuada de los términos del polinomio dado por (3.19), ya que en general suele haber varias alternativas. Cada una de ellas define un elemento distinto cuyas propiedades deben ser estudiadas con detalle.

3.2.1. Elemento rectangular de cuatro nodos MZC, deducción de la matriz de rigidez, masa y vector de fuerzas nodales

La figura 3.4 muestra el elemento MZC. Por tener cuatro nodos, el número de términos del polinomio dado por (3.19) debe ser 12. Vemos, por consiguiente, que de entrada hay que renunciar a la utilización de un polinomio completo, puesto que los polinomios completos de tercer y cuarto orden tienen 10 y 15 términos, respectivamente. Así pues, deben omitirse algunos términos del polinomio de cuarto orden. Melosh, Zienkiewicz y Cheung desarrollaron un popular elemento rectangular, el cual se ha denominado MZC, basándose en la siguiente aproximación:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (3.21)$$

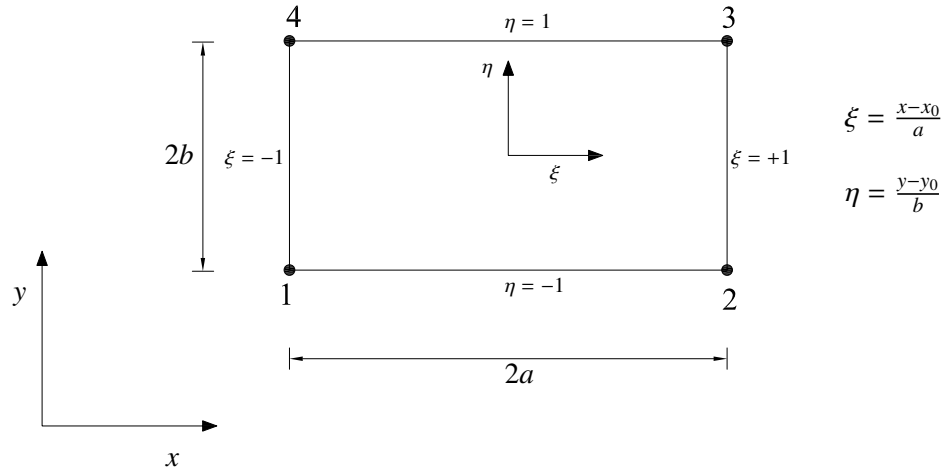


Figura 3.4: Elemento de placa rectangular de cuatro nodos no conforme MZC.

La expresión anterior garantiza la invarianza geométrica y asimismo que a lo largo de los lados $x = \text{constante}$ ó $y = \text{constante}$, la flecha varía según un polinomio completo de tercer grado. Las cuatro variables $w_i, w_j, (\frac{\partial w}{\partial x})_i, (\frac{\partial w}{\partial x})_j$ ó $(\frac{\partial w}{\partial y})_i, (\frac{\partial w}{\partial y})_j$ correspondientes a los nodos del lado $i - j$ permiten calcular de manera unívoca las cuatro constantes de dicho polinomio, con lo que queda garantizada la continuidad de w entre elementos.

Las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{12}$ se calculan haciendo uso de las ecuaciones (3.20). Tras operar, se encuentra

$$a^{(e)} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \vdots \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 y_1 & x_1 y_1^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_1 & y_1 & 0 & 3x_1^2 & 2x_1 y_1 & y_1^2 & 0 & 3x_1^2 y_1 & y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2x_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 2x_1 y_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 2x_4 y_4^2 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

De (3.22) se calculan las α_i como

$$\alpha_i = A^{-1} a_i^{(e)}. \quad (3.24)$$

Finalmente, de (3.21) y (3.24) se obtiene

$$w = P^T \alpha = P^T A^{-1} a^{(e)} = N a^{(e)}, \quad (3.25)$$

donde N es la matriz de funciones de forma del elemento con

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2 y & xy^2 & y^3 & x^3 y & xy^3 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Afortunadamente el proceso anterior ha sido resuelto de forma general, obteniéndose una forma explícita de la matriz N . De esta manera se tiene:

$$w = \sum_{i=1}^4 \left[N_i w_i + \bar{N}_i \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i + \bar{\bar{N}}_i \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right] = N a^{(e)}, \quad (3.27)$$

donde

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad ; \quad N_i = \begin{bmatrix} N_i & \bar{N}_i & \bar{\bar{N}}_i \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$a^{(e)} = \begin{bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ a_3^{(e)} \\ a_4^{(e)} \end{bmatrix} \quad ; \quad a_i^{(e)} = \left[w_i \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right]^T, \quad (3.29)$$

son las matrices de funciones de forma y el vector de movimientos del elemento j de un nodo i , respectivamente. La expresión analítica de las funciones de forma $N_i = [N_i, \bar{N}_i, \bar{\bar{N}}_i]$ en coordenadas naturales es:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (2 + \xi_i \xi + \eta_i \eta - \xi^2 - \eta^2), \\ \bar{N}_i &= \frac{a}{8} (\xi^2 - 1) (\xi + \xi_i) (1 + \eta_i \eta), \\ \bar{\bar{N}}_i &= \frac{b}{8} (\eta^2 - 1) (\eta + \eta_i) (1 + \xi_i \xi). \end{aligned} \quad (3.30)$$

La matriz de deformación generalizada de flexión se obtiene haciendo uso de (3.14) y (3.27) como

$$\hat{\varepsilon}_f = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 B_i a_i^{(e)} = B a^{(e)}, \quad (3.31)$$

con

$$B_f = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

y

$$B_i = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 \bar{N}_i}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 \bar{\bar{N}}_i}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 \bar{N}_i}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 \bar{\bar{N}}_i}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} & -2\frac{\partial^2 \bar{N}_i}{\partial x \partial y} & -2\frac{\partial^2 \bar{\bar{N}}_i}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Para el cálculo de las derivadas segundas de las funciones de forma en la matriz B_i , se debe tener en cuenta que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (3.34)$$

Además, de (3.27) y (3.31) se deduce que

3.2. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

$$\delta w = N\delta a^{(e)} \quad y \quad \delta \hat{\varepsilon} = B\delta a^{(e)}. \quad (3.35)$$

Haciendo uso de estas expresiones y de la relación (3.12) entre esfuerzos y curvaturas, tras sustituir adecuadamente en el PTV, la ecuación matricial de equilibrio del elemento es

$$K^{(e)} a^{(e)} = q^{(e)} + f^{(e)}, \quad (3.36)$$

donde la matriz de rigidez elemental viene dada por

$$K_{MZO}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B_i^T \hat{D}_f B_i dx dy. \quad (3.37)$$

La matriz de masa elemental es

$$M_{MZO}^{(e)} = \bar{m} \iint_{A^{(e)}} N_i^T N_i dx dy, \quad (3.38)$$

y el vector de fuerzas elementales equivalentes debido a una carga repartida q es

$$q_i = \begin{bmatrix} W_i \\ M_{x_i} \\ M_{y_i} \end{bmatrix}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} N_i^T q dx dy = \iint_{A^{(e)}} q \begin{bmatrix} N_i \\ \bar{N}_i \\ \bar{\bar{N}}_i \end{bmatrix} dx dy. \quad (3.39)$$

Por otra parte, $f^{(e)}$ en (3.36) es el vector de fuerzas nodales de equilibrio utilizado para el ensamblaje

$$f_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \bar{W}_i & \bar{M}_{x_i} & \bar{M}_{y_i} \end{bmatrix}^T. \quad (3.40)$$

Finalmente, la expresión del vector de fuerzas nodales equivalentes para una carga q uniformemente distribuida sobre el elemento es:

$$q_i^{(e)} = 4qab \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{a}{12} & \frac{b}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{a}{12} & \frac{b}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{a}{12} & -\frac{b}{12} & \frac{1}{4} & \frac{a}{12} & -\frac{b}{12} \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Resta decir que las integrales (3.37) y (3.38) se calculan por el método de integración numérica de Gauss para dos dimensiones (ver [4]), teniendo en cuenta la ecuación (3.34), obteniendo así la matriz de rigidez y de masa elemental. Las matrices en coordenadas globales de rigidez y de masa, al igual que el vector en coordenadas globales de fuerzas nodales, se obtienen con el clásico proceso de ensamblaje a través de los vectores de coordenadas y conectividades de cada elemento que compone la malla de elementos rectangulares.

3.2.1.1. Cálculo de tensiones

Los esfuerzos en los puntos nodales se calculan con la siguiente expresión

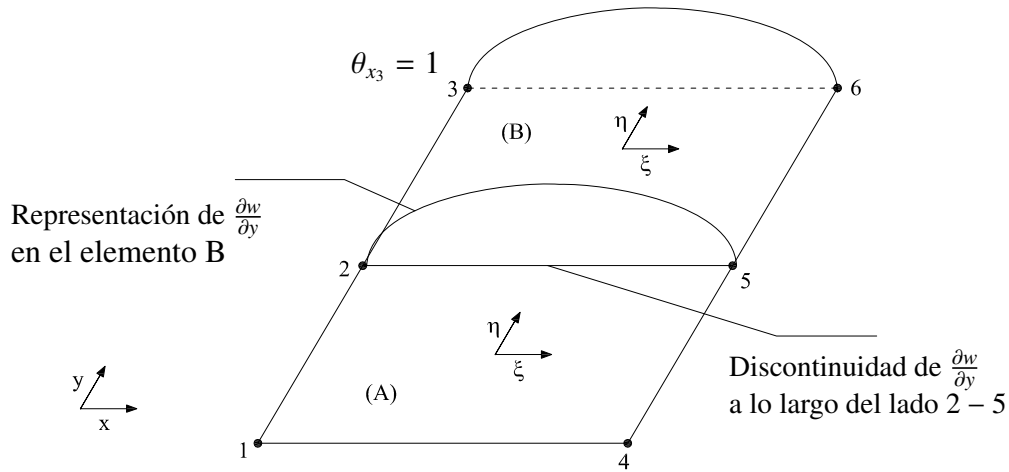
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^{(e)} = D_f B_f a^{(e)}. \quad (3.42)$$

Debido a que las tensiones se calculan en los nodos de cada elemento, puede ocurrir que en nodos comunes sus valores varíen considerablemente. Esto se puede solucionar promediando los valores de las tensiones que comparten el mismo nodo, lo cual se denomina *alisado de tensiones*.

Tal como se ha mencionado anteriormente (Capítulo 2), una vez que se ha resuelto la ecuación (2.74) y se han utilizado las ecuaciones (2.37) y (2.44) se pueden obtener las tensiones sobre la losa a través de la ecuación (3.42). Cabe destacar que la ecuación (3.42) se ha utilizado para el cálculo de tensiones del caso estático y dinámico del elemento rectangular.

3.2.1.2. No Conformidad del elemento MZC

Es importante resaltar que aunque el campo de desplazamientos definido por (3.21) establece la continuidad de w entre elementos, no garantiza, sin embargo, la continuidad de las primeras derivadas, excepto en los nodos donde toman un valor único. Para aclarar esto consideremos los elementos (A) y (B) de la figura 3.5. Supongamos que todas las variables son cero a excepción de θ_x en el nodo 3 del elemento (B), que toma el valor unidad. En el elemento (A) la flecha w es cero y, por consiguiente, $\frac{\partial w}{\partial y}$ a lo largo del lado 2–5 común a ambos elementos. En el elemento (B) la flecha vale $\frac{(\xi^2-1)(\xi-1)(1+\eta)}{8}$ de manera que $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{l_{2-3}}{2} \frac{(\xi^2-1)(\xi-1)}{8}$ a lo largo del lado 2-5. Vemos, pues, que existe una clara discontinuidad entre los valores de la derivada $\frac{\partial w}{\partial y}$ a lo largo del lado común, indicando que el elemento MZC es incompatible o no conforme.



Todos los movimientos son nulos a excepción de $\theta_{x_3} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_3 = 1$

Figura 3.5: Ejemplo de discontinuidad de la derivada $\frac{\partial w}{\partial y}$ a lo largo de un lado común a dos elementos.

Esta falta de continuidad de la derivada normal a un lado, que en este caso coincide con el giro normal (figura 3.6), se traduce en que las derivadas cruzadas $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ toman un valor diferente en los nodos, violándose uno de los requisitos básicos de continuidad de la función w .

Esta circunstancia puede comprobarse observando la figura 3.6a. La derivada $\frac{\partial w}{\partial x}$ a lo largo del lado 1–2 depende de los valores $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1$ y $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2$, mientras que la derivada $\frac{\partial w}{\partial y}$ a lo largo de 2–3 depende de $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_3$ y $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_4$. Por consiguiente, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ a lo largo de 1–2 depende de $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1$ y $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ a lo largo de 2–3 depende de $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_3$. Como generalmente $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1$ y $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_3$ son independientes, los valores de $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_2$ y $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\right)_2$ diferirán con la siguiente pérdida de continuidad.

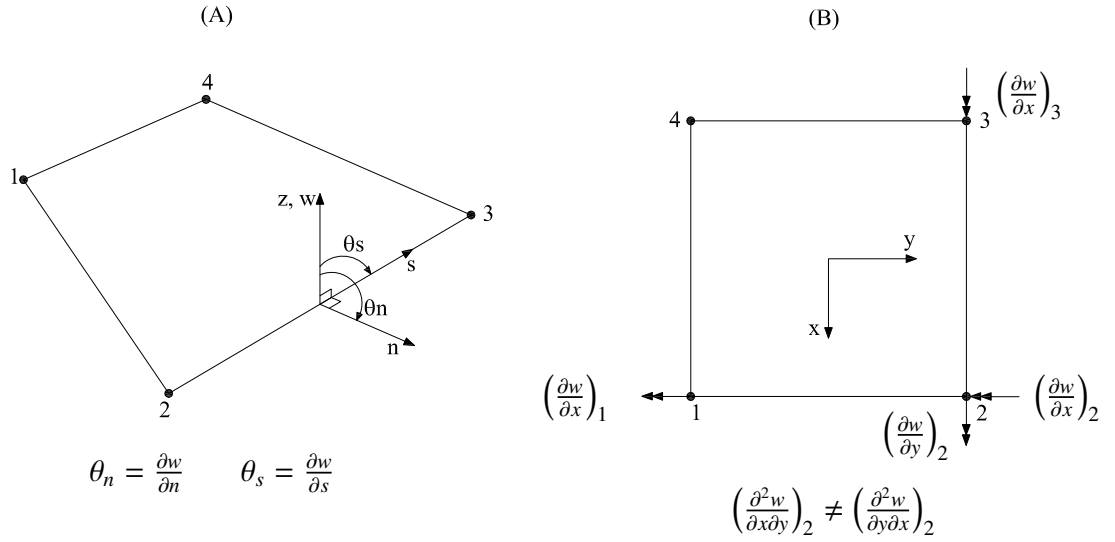


Figura 3.6: a) Concepto de giro normal y tangencial a un lado. b) Desigualdad de las derivadas $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ en los nodos.

Es por tanto, imposible garantizar la conformidad del elemento MZC tomando como variables nodales la flecha y sus primeras derivadas. Esto, no obstante, no invalida al elemento que satisface el criterio de la parcela lo que asegura la convergencia al disminuir el tamaño de la malla.

Desgraciadamente, al transformar el elemento en formas cuadriláteras arbitrarias deja de satisfacer el criterio de la parcela perdiéndose todas las garantías de obtener convergencia y, por consiguiente, el elemento cuadrangular de cuatro nodos MZC no es fiable para usos prácticos. No obstante, en su forma rectangular es un elemento extremadamente preciso.

3.2.2. Elemento triangular de tres nodos DKT, deducción de la matriz de rigidez, masa y vector de fuerzas nodales

Al igual que la formulación del elemento MZC, el DKT se basa en la Teoría discreta de Kirchhoff para placas delgadas, la que da origen al elemento triangular discreto de Kirchhoff, denominado DKT, el cual ha demostrado tener un excelente comportamiento con respecto a su convergencia ([8]). Una de las técnicas para desarrollar elementos de placas de Kirchhoff conformes es introducir ciertas modificaciones en los elementos de placa de Reissner-Mindlin de manera que se satisfagan de forma discreta sobre el elemento las condiciones de Kirchhoff. El objetivo de utilizar esta teoría es evitar los requisitos de continuidad C_1 de los elementos de

3.2. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

placa de Kirchhoff, imponiendo las condiciones de placa delgada ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) sobre puntos discretos de elementos de clase C_0 formulados en base a la teoría de placas de Reissner-Mindlin.

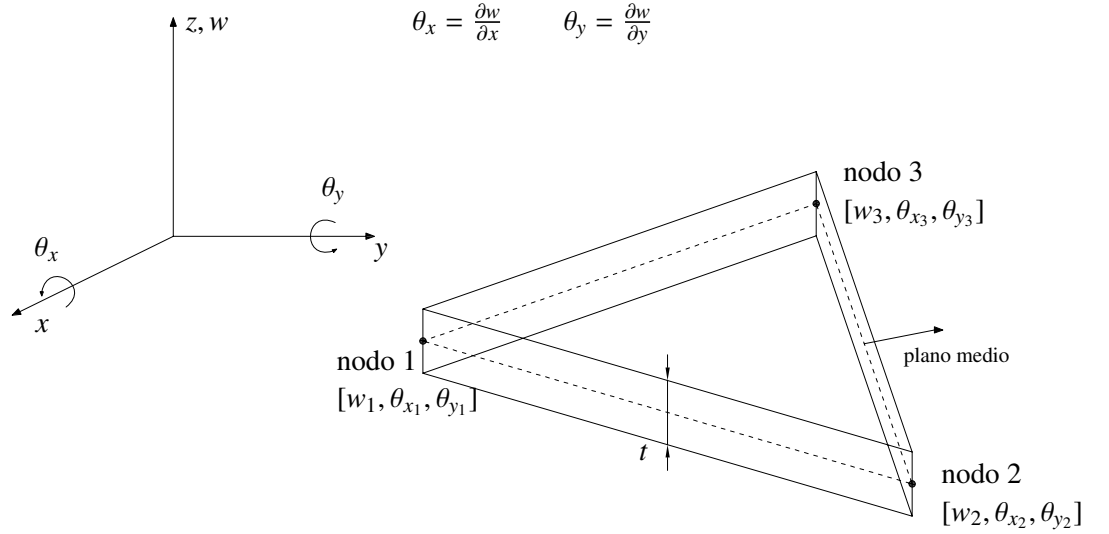


Figura 3.7: Definición geométrica del elemento de placa DKT y convenio de signos para desplazamientos y giros.

3.2.2.1. Teoría de placas de Reissner-Mindlin

La teoría de placas de Reissner-Mindlin se obtiene de la de Kirchhoff simplemente relajando la hipótesis de ortogonalidad de la normal durante la deformación de la placa. Así, se mantienen las tres primeras hipótesis de la teoría de Kirchhoff explicadas en la sección 3.1.2. Por el contrario, la cuarta hipótesis sobre ortogonalidad de la normal se modifica de la siguiente manera:

4. Los puntos que antes de la deformación estaban sobre la normal al plano medio de la placa, permanecen al deformarse sobre una misma recta, sin que ésta tenga que ser necesariamente ortogonal a la deformada del plano medio.

3.2.2.2. Campo de desplazamientos

De las hipótesis 1 y 2 de la sección 3.1.2 y de la 4 de la sección anterior se deduce que:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= -z\theta_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w(x, y), \end{aligned} \tag{3.43}$$

donde θ_x y θ_y son los ángulos que definen el giro normal. Puede comprobarse que el campo de desplazamiento anterior coincide con el expresado por la ecuaciones (3.2) para la teoría de Kirchhoff. Así, el vector de movimientos se define de igual forma como

$$u = \begin{bmatrix} w & \theta_x & \theta_y \end{bmatrix}^T. \tag{3.44}$$

De la hipótesis 4 sobre el giro de la normal se tiene

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \tag{3.45}$$

e igualmente para el plano yz

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y. \tag{3.46}$$

Es decir, los giros de la normal en un punto se componen de dos términos: Los primeros, $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$, son debidos al cambio de pendiente del plano medio. Los segundos, ϕ_x y ϕ_y , son debidos al cambio de pendiente del plano medio y se deben al giro adicional de la normal al no permanecer necesariamente ortogonal a la deformada del plano medio. Las ecuaciones (3.45) y (3.46) muestran claramente que los giros de la normal θ_x y θ_y no pueden obtenerse únicamente en función de la pendiente del plano medio, como ocurría en la teoría de Kirchhoff ((3.4)). Esto permite considerar dichos giros como variables independientes, siendo ésta, la diferencia sustancial entre ambas teorías de placas. Asimismo, hay que destacar que la hipótesis 4 establece que las normales al plano medio se mantienen rectas después del giro, lo que implica, que la distribución de tensiones τ_{xz} y τ_{yz} es constante sobre el espesor.

3.2.2.3. Campo de deformaciones y tensiones

De las expresiones de la elasticidad tridimensional y (3.43) se deducen:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right), \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = -\phi_x, \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = -\phi_y,
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Se aprecia en (3.47) que la hipótesis de no ortogonalidad de la normal se traduce en que las deformaciones transversales γ_{xz} y γ_{yz} no son nulas. Debemos notar que la condición de deformaciones transversales nulas implica $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ y $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}$, recuperándose la hipótesis de ortogonalidad de la normal de la teoría de Kirchhoff, como era de esperar.

Puesto que por la hipótesis 3 (ver Sección 3.1.2) la tensión normal σ_z es nula, se puede definir el vector de tensiones no nulas por

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \dots \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_f \\ \sigma_c \end{bmatrix}, \tag{3.48}$$

donde σ_f y σ_c representan los vectores de tensiones debidas a efectos de flexión y cortante transversal, respectivamente. El criterio de signos para las tensiones de flexión σ_x , σ_y y τ_{xy} coincide con el de la figura 3.3.

Por analogía podemos definir el vector de deformaciones por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \dots \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \dots \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_f \\ \dots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_c \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}_f$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ son, respectivamente, los vectores de deformaciones de flexión y corte transversal.

3.2.2.4. Matriz de Rigidez y Masa del elemento DKT

Para las placas delgadas, la deformación transversal por corte y, por lo tanto su energía de deformación U_s es despreciable comparado con la energía de deformación por flexión. Teniendo en cuenta lo anterior, la formulación de la matriz de rigidez del elemento DKT se basa en la siguiente expresión:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}_f^T \hat{D}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f dx dy, \quad (3.50)$$

donde U es la energía de deformación por flexión, A es al área del plano medio del elemento, $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el vector de deformaciones por flexión y \hat{D}_f es la matriz constitutiva.

De la ecuación (3.50) se puede observar que sólo depende del aporte que da la flexión, ya que para placas delgadas el aporte energético de la deformación por corte transversal es despreciable, además la ecuación (3.50) contiene solamente las primeras derivadas de θ_x y θ_y , por lo tanto es relativamente fácil establecer funciones de interpolación que satisfagan los requerimientos de compatibilidad, relacionando la rotación de la normal (θ_x y θ_y) a la superficie media con los desplazamientos transversales w . Este objetivo se alcanza con las siguientes consideraciones:

- El elemento triangular debe tener solo 9 grados de libertad, los cuales son el desplazamiento w y los giros θ_x y θ_y de los tres nodos esquineros.
- Los giros nodales θ_x y θ_y deben ser $\theta_x = +\frac{\partial w}{\partial y}$ y $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$, de modo que se satisfagan las condiciones de borde del elemento.
- Ya que los modelos de elementos de placas delgadas son gobernados por la teoría de Kirchhoff, está se puede aplicar sobre cualquier punto discreto del elemento.

3.2. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

d. La compatibilidad de los giros θ_x y θ_y no debe perderse.

Tal como se ha mencionado en la sección 3.2.2, el punto de partida es el elemento triangular de placa de Reissner-Mindlin de 6 nodos de la figura 3.8 sometido a las siguientes condiciones:

1. Los giros θ_x y θ_y varían cuadráticamente sobre el elemento, es decir

$$\theta_x = \sum_{i=1}^6 N_i \theta_{x_i} \quad ; \quad \theta_y = \sum_{i=1}^6 N_i \theta_{y_i}, \quad (3.51)$$

donde N_i son las clásicas funciones de forma del elemento triangular de 6 nodos de clase C_0 dadas en el Anexo A, teniendo en cuenta la numeración nodal de la figura 3.8.

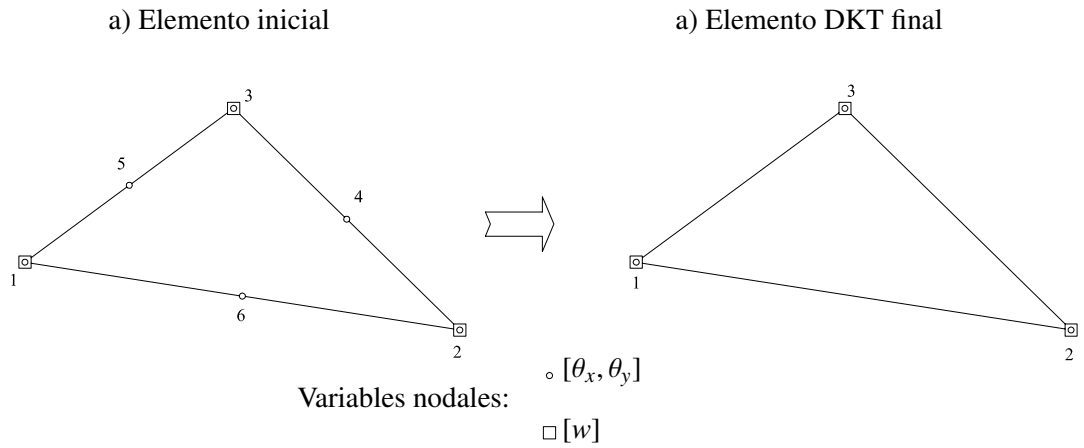


Figura 3.8: Elemento de placa DKT de tres nodos.

2. La variación de los desplazamientos w a lo largo de los lados es cúbica.

3. Se impone una variación lineal del giro normal a lo largo de los lados θ_n , es decir

$$\theta_{n_k} = \frac{1}{2}(\theta_{n_i} + \theta_{n_j}), \quad (3.52)$$

3.2. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

donde $k = 4, 5, 6$ denota el nodo intermedio de los lados $ij = 23, 31$ y 12 respectivamente.

4. Las condiciones de deformación transversal nula (Hipótesis de Kirchhoff) se imponen en:

- a. Los nodos de las esquinas

$$(\varepsilon_c)_i = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{array} \right\}_i = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.53)$$

- b. Los nodos laterales

$$\theta_{s_k} + \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_k = 0 \quad ; \quad k = 4, 5, 6 \quad , \quad (3.54)$$

donde s es la dirección del lado que contiene el nodo k . De acuerdo con la hipótesis 2 y las funciones de forma, se tiene

$$\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) = \frac{3}{2l_{ij}} w_i - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_i + \frac{3}{2l_{ij}} w_j - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_j \quad (3.55)$$

donde l_{ij} la longitud del lado ij que contiene el nodo intermedio k .

5. Para el cálculo de la matriz de rigidez sólo se considera la contribución de la flexión, es decir $K^{(e)} = K_f^{(e)}$.

De las condiciones anteriores se desprenden los siguientes comentarios:

- Las ecuaciones (3.53) y (3.54) proporcionan la relación entre la flecha y giros.
- La condición 2 equivale a que la flecha varía en forma cúbica sobre todo el elemento.
- Como la flecha varía de forma cúbica sobre los lados, $\frac{\partial w}{\partial s}$ varía cuadráticamente y también lo hace el giro tangencial θ_s . Así, pues, como $\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)$ coincide con θ_s en 3 puntos de cada lado, se satisface la hipótesis de Kirchhoff $\left(\gamma_s = \frac{\partial w}{\partial s} - \theta_s = 0 \right)$ a lo largo de todo el contorno del elemento. Puede comprobarse que esto justifica la exclusión de la energía de deformación por corte en el cálculo de la matriz de rigidez, con lo que el elemento se comporta efectivamente como un elemento de placa delgada de Kirchhoff.

3.2. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

- Se deduce de las ecuaciones (3.51)-(3.55) que w , $\frac{\partial w}{\partial s}$, θ_s y θ_n son continuos a lo largo de los lados y el elemento es compatible.

Utilizando las consideraciones anteriores, se puede establecer una interpolación del desplazamiento w (flecha) y giros θ_x y θ_y nodales, a través de:

$$u = Na^{(e)}, \quad (3.56)$$

donde

$$u = \begin{bmatrix} w & \theta_x & \theta_y \end{bmatrix}^T \quad (3.57)$$

es el vector de movimientos,

$$a^{(e)} = \begin{bmatrix} w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & w_3 & \theta_{x3} & \theta_{y3} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

es el vector de movimientos de cada grado de libertad del elemento, y

$$N = \begin{Bmatrix} N_w \\ N_{\theta_x} \\ N_{\theta_y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{w1} & N_{w2} & N_{w3} & N_{w4} & N_{w5} & N_{w6} & N_{w7} & N_{w8} & N_{w9} \\ N_{\theta_{x1}} & N_{\theta_{x2}} & N_{\theta_{x3}} & N_{\theta_{x4}} & N_{\theta_{x5}} & N_{\theta_{x6}} & N_{\theta_{x7}} & N_{\theta_{x8}} & N_{\theta_{x9}} \\ N_{\theta_{y1}} & N_{\theta_{y2}} & N_{\theta_{y3}} & N_{\theta_{y4}} & N_{\theta_{y5}} & N_{\theta_{y6}} & N_{\theta_{y7}} & N_{\theta_{y8}} & N_{\theta_{y9}} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

N es la matriz de funciones de forma del elemento DKT, que aproximan o interpolan los desplazamientos y giros nodales.

Las expresiones de las funciones de forma se muestran en el Anexo A.

La matriz de deformación generalizada de flexión se obtiene a partir del vector ε_f y la ecuación (3.58) como

$$\varepsilon_f = B_f a^{(e)}, \quad (3.60)$$

donde B_f es la matriz de deformación generalizada del elemento

$$B_f = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} \frac{\partial N_{\theta_x}^T}{\partial \xi} + y_{12} \frac{\partial N_{\theta_x}^T}{\partial \eta} & -x_{31} \frac{\partial N_{\theta_x}^T}{\partial \xi} - x_{12} \frac{\partial N_{\theta_y}^T}{\partial \eta} \\ -x_{31} \frac{\partial N_{\theta_x}^T}{\partial \xi} - x_{12} \frac{\partial N_{\theta_x}^T}{\partial \eta} & y_{31} \frac{\partial N_{\theta_y}^T}{\partial \xi} + y_{12} \frac{\partial N_{\theta_y}^T}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

con $2A = x_{31}y_{12} - x_{12}y_{31}$, teniendo en cuenta que A es el área del elemento triangular.

Las derivadas de N_{θ_x} y N_{θ_y} con respecto a ξ y η se encuentran explícitamente en el Anexo A, al igual que las expresiones de los coeficientes x_{ij} e y_{ij} .

La expresión para encontrar la matriz de rigidez del elemento DKT es la siguiente

$$K_{DKT}^{(e)} = 2A^{(e)} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} B_f^T \hat{D}_f B_f d\xi d\eta, \quad (3.62)$$

y para la matriz de masa ([9]):

$$M_{DKT}^{(e)} = 2A^{(e)} \bar{m} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} N_w^T N_w d\xi d\eta. \quad (3.63)$$

Finalmente, la expresión del vector de fuerzas nodales equivalentes para una carga q uniformemente distribuida sobre el elemento es

$$q_i^{(e)} = \frac{qA^{(e)}}{3} [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0], \quad (3.64)$$

donde q es la carga repartida sobre el elemento triangular y A es el del elemento triangular.

Resta decir, al igual que para el elemento rectangular, que las ecuaciones (3.62) y (3.63) se calculan por el método de integración numérica de Gauss para dos dimensiones ([4]), obteniendo así la matriz de rigidez y de masa elemental. Las matrices en coordenadas globales de rigidez y de masa, al igual que el vector en coordenadas globales de fuerzas nodales, se obtienen con el clásico proceso de ensamblaje a través de la matriz de transformación de coordenadas, y también, por los vectores de coordenadas y conectividades de cada elemento que compone la malla de elementos triangulares.

3.2.2.4.1. Cálculo de tensiones

Los esfuerzos en los puntos nodales se calculan con la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^{(e)} = D_f B_f a^{(e)}. \quad (3.65)$$

Debido a que las tensiones se calculan en los nodos de cada elemento, lo que puede causar que en nodos comunes sus valores varíen considerablemente. Esto se puede solucionar promediando los valores de las tensiones que comparten el mismo nodo, lo cual se denomina *alisado de tensiones*.

Como se dijo anteriormente (Capítulo 2), una vez que se ha resuelto la ecuación (2.74) y se han utilizado las ecuaciones (2.37) y (2.44) se pueden obtener las tensiones sobre la losa a través de la ecuación (3.65). Cabe destacar que la ecuación (3.65) se ha utilizado para el

3.2. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

cálculo de tensiones del caso estático y dinámico del elemento triangular.

Capítulo 4

Validación numérica

Para poder utilizar el programa, primero se ha realizado su validación, es decir, se deben comparar los resultados del programa con las soluciones analíticas o exactas que entregan algunos autores, los cuales se han basado en la Teoría de la Elasticidad Lineal, y específicamente en la Teoría de Placas y la Teoría de Dinámica Estructural. Debido a que el programa involucra el comportamiento dinámico de una estructura (respuesta de una losa bajo la acción de un terremoto vertical), ha sido necesario comprobar la correcta obtención de las matrices de rigidez y masa, al igual que la resolución temporal de la ecuación de movimiento. La matriz de rigidez de la losa se ha validado con un ejemplo clásico de una losa empotrada en todos sus bordes sometida a una carga repartida q y la matriz de masa, mediante la comparación de las frecuencias naturales entregadas por una expresión analítica proveniente de la teoría de vibración libre de placas con las que entrega el programa por medio del Método de los Elementos Finitos. Finalmente, la integración en el tiempo del registro de aceleraciones, se ha validado comparando la respuesta de un oscilador de un grado de libertad, como el de la figura 2.2, obtenida mediante su solución analítica con la respuesta que otorga el método numérico de Newmark.

4.1. Validación del caso estático

4.1.1. Validación de resultados para losas rectangulares

En este ejemplo, se estudia la convergencia de la flecha central de una losa cuadrada con todos sus bordes empotrados.

La solución teórica o analítica del problema, según la teoría de Kirchhoff para placas

4.1. VALIDACIÓN DEL CASO ESTÁTICO

delgadas está dada por la siguiente expresión ([2])

$$w_{centro} = 0,01512 \frac{qL^4(1-\nu^2)}{Et^3}, \quad (4.1)$$

donde w es la flecha central, q es la carga repartida, E es el módulo de elasticidad, ν es el módulo de Poisson y t es el espesor de la losa.

Las propiedades de la losa con las que se ha realizado el análisis son las siguientes:

Ancho [m]	6
Largo [m]	6
Espesor [m]	0,15
$E [\frac{N}{m^2}]$	$2,302581 \times 10^{10}$
ν	0,2
$q [\frac{N}{m^2}]$	9800
$w_{exacto} [m]$	0,0023723

Tabla 4.1: Tabla inputs necesarios para utilizar el programa en el caso estático.

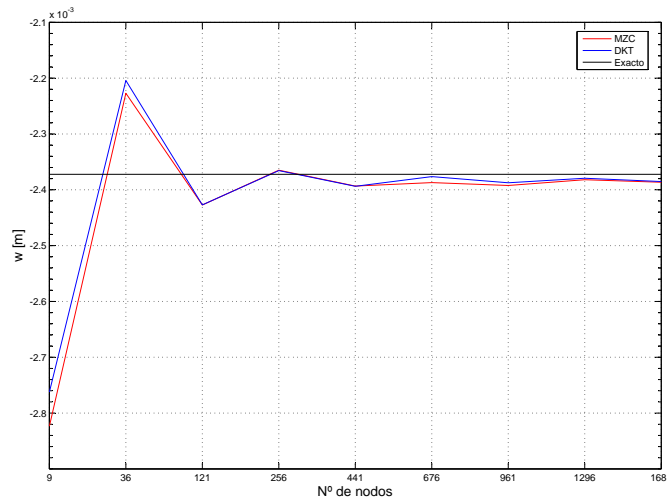


Figura 4.1: Convergencia del elemento MZC y DKT para losas rectangulares en el caso estático.

De la figura 4.1 se puede deducir que tanto el elemento MZC y DKT son muy buenas aproximaciones de la flecha central de la losa.

4.1. VALIDACIÓN DEL CASO ESTÁTICO

En las siguientes figuras se muestran los ploteos de las deformadas de la losa con el elemento MZC y DKT.

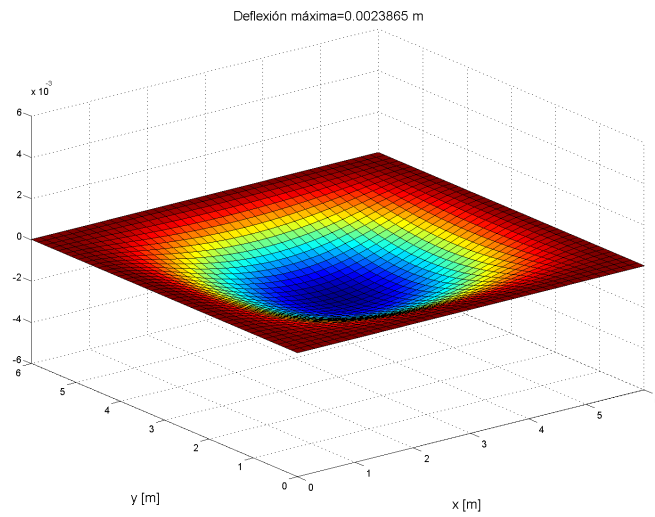


Figura 4.2: Ploteo de la deformada de la losa discretizada con elementos rectangulares.

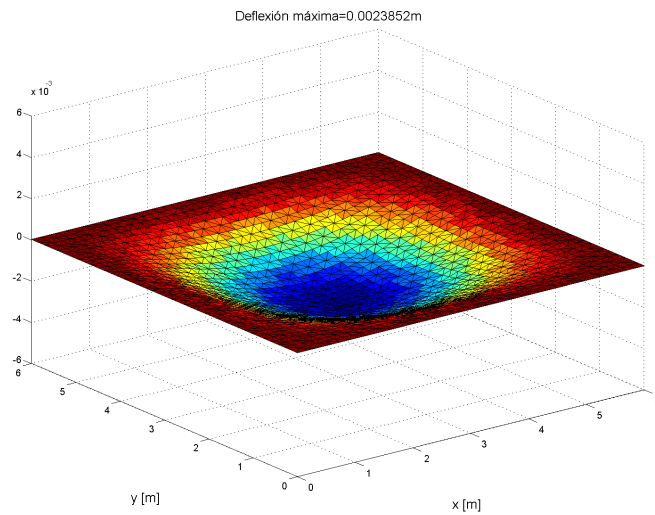


Figura 4.3: Ploteo de la deformada de la losa discretizada con elementos triangulares.

4.1.2. Validación de resultados para losas circulares

Según la teoría de Kirchhoff para placas delgadas, la expresión analítica o exacta de la flecha de una placa circular empotrada y sometida a una carga repartida ([5]) es la siguiente

$$w_{centro} = \frac{qr^4}{64\bar{D}_f}, \quad (4.2)$$

donde $\bar{D}_f = \frac{Et^3}{(1-\nu^2)}$ es la rigidez flexural de una placa, w es la flecha central, q es la carga repartida y r es el radio de la losa.

Las propiedades de la losa con las que se ha realizado el análisis son las siguientes:

Radio [m]	6
Espesor [m]	0,15
$E [\frac{N}{m^2}]$	$2,302581 \times 10^{10}$
ν	0,2
$q [\frac{N}{m^2}]$	9800
$w_{exacto} [m]$	0,0294181

Tabla 4.2: Tabla inputs necesarios para utilizar el programa en el caso estático.

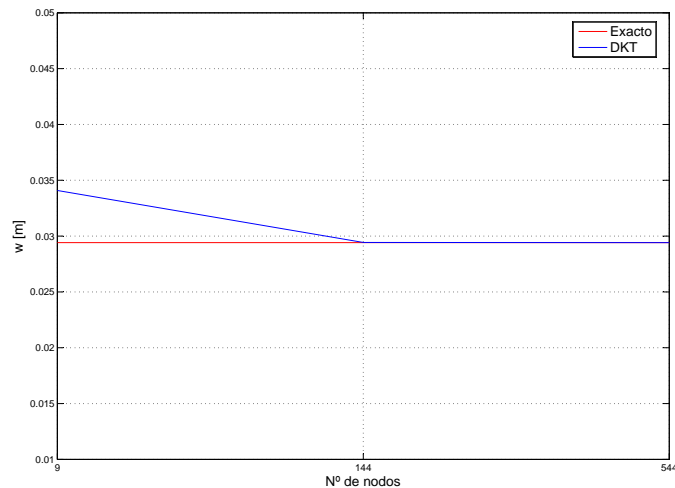


Figura 4.4: Convergencia del elemento DKT para losas circulares en el caso estático.

4.1. VALIDACIÓN DEL CASO ESTÁTICO

De la figura 4.4, se puede desprender que la convergencia del elemento DKT para la flecha central de una losa circular es muy buena.

La deformada de la losa circular que se ha analizado se muestra en el siguiente ploteo.

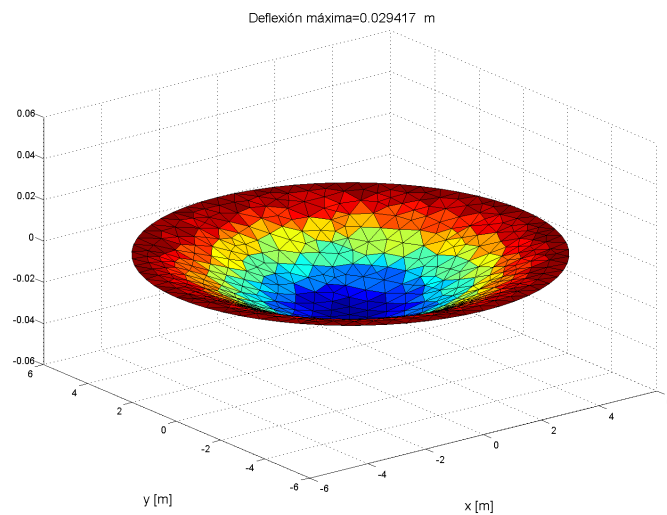


Figura 4.5: Deformada de losa circular discretizada con la malla N^o3.

Las tres mallas de elementos finitos que se han utilizado se muestran a continuación.

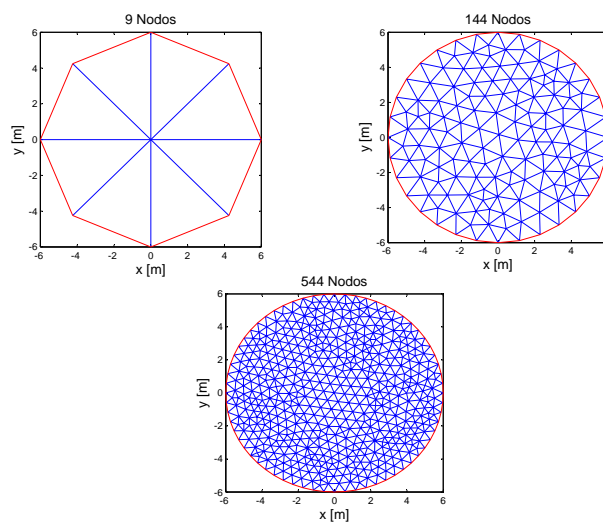


Figura 4.6: Mallado de Elementos Finitos utilizadas en la validación.

4.2. Validación del caso dinámico

La validación del caso dinámico se ha llevado a cabo a través de la comparación de las 6 primeras frecuencias naturales obtenidas de la teoría de vibración libre de placas y las obtenidas a través del programa. Cabe destacar que la losa que se ha utilizado para la validación, es una losa cuadrada simplemente apoyada, ya que la expresión teórica para las frecuencias naturales sólo es válida para estos tipos de losas ([6], [7]).

La expresión teórica para calcular las frecuencias naturales es la siguiente ([6], [7])

$$\omega_m = \pi^2 \sqrt{\bar{D}_f \rho t} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right], \quad (4.3)$$

donde \bar{D}_f es la rigidez flexural de una placa, ρ es la densidad del material de la placa, t es el espesor de la placa, a y b son las longitudes de los lados de la placa, y finalmente, m indica la numeración de los modos de vibrar de la placa.

Las propiedades de la losa son las siguientes:

Condiciones de borde	simplemente apoyada en todos sus extremos
Espesor t [m]	0,15
E [$\frac{N}{m^2}$]	$2,302581 \times 10^{10}$
ν	0,2
ρ [$\frac{kg}{m^3}$]	2500
\bar{D}_f [$\frac{N}{m^2}$]	6745842.7

Tabla 4.3: Tabla inputs necesarios para utilizar el programa en el caso dinámico.

Los resultados se encuentran en la siguientes tablas:

m	Nº de nodos										Exacto
	121		256		441		676		961		
	MZC	DKT	MZC	DKT	MZC	DKT	MZC	DKT	MZC	DKT	
1	2634.7	2690.4	2641.7	2666.5	2644.2	2658.2	2645.4	2654.3	2646.0	2652.2	2647.4
2	10396	11254	10500	10882	10539	10758	10557	10698	10567	10666	10589.9
3	22927	26811	23391	25107	23574	24609	23663	24348	23712	24196	23827.2
4	39833	49772	41055	45429	41584	44415	41850	43808	42000	43425	42359.6
5	60855	78741	63219	71583	64368	70072	64975	69065	65326	68395	66186.9
6	85962	109440	86159	104780	85995	99790	85977	94992	85983	92282	95309.1

Tabla 4.4: Comparación de frecuencias naturales en [$\frac{rad}{s}$] para una losa de $1[m] \times 1[m]$ para distintas discretizaciones.

4.3. VALIDACIÓN DE LA INTEGRACIÓN EN EL TIEMPO DEL REGISTRO DE ACELERACIONES

m	Nº de nodos										Exacto
	121		256		441		676		961		
	MZC	DKT	MZC	DKT	MZC	DKT	MZC	DKT	MZC	DKT	
1	73.1	74.7	73.3	74.0	73.4	73.8	73.4	73.7	73.50	73.67	73.5
2	288.7	312.6	291.6	302.2	292.7	298.8	293.2	297.1	293.52	296.26	294.1
3	636.8	744.7	649.7	697.4	654.8	683.5	657.2	676.3	658.66	672.12	661.8
4	1106.5	1382.6	1140.4	1261.9	1155.1	1233.7	1162.5	1216.9	1166.67	1206.24	1176.6
5	1690.4	2187.2	1756.1	1988.4	1788	1946.4	1804.8	1918.5	1814.61	1899.85	1838.5
6	2387.8	3040.1	2393.3	2910.6	2388.8	2772	2388.2	2638.7	2388.42	2563.38	2647.4

Tabla 4.5: Comparación de frecuencias naturales en $[\frac{rad}{s}]$ para una losa de $6[m] \times 6[m]$ para distintas discretizaciones.

m	Nº de nodos										Exacto
	121		256		441		676		961		
	MZC	DKT	MZC	DKT	MZC	DKT	MZC	DKT	MZC	DKT	
1	18.2	18.6	18.3	18.5	18.3	18.4	18.3	18.4	18.4	18.4	18.3
2	72.1	77.8	72.9	75.5	73.1	74.7	73.3	74.2	73.4	74.1	73.5
3	159.2	181.4	162.4	174.3	163.7	170.9	164.3	169.0	164.7	168.0	165.4
4	276.6	327.5	285.1	315.4	288.7	308.4	290.6	304.2	291.7	301.6	294.1
5	422.6	512.3	439.0	497.1	447	486.6	451.2	479.6	453.7	475.0	459.6
6	773.3	800.7	773.1	981.2	776.9	926.2	777.9	880.6	597.1	640.9	661.8

Tabla 4.6: Comparación de frecuencias naturales en $[\frac{rad}{s}]$ para una losa de $12[m] \times 12[m]$ para distintas discretizaciones.

De las tablas 4.4, 4.5 y 4.6, es posible apreciar que los valores de las frecuencias naturales de las placas calculadas con el elemento MZC y DKT son buenas aproximaciones del valor teórico otorgado por la ecuación (4.3).

4.3. Validación de la integración en el tiempo del registro de aceleraciones

Para utilizar la implementación numérica que se ha descrito en el Capítulo 2, ha sido necesario corroborar su buen funcionamiento a través de la comparación de la respuesta de un oscilador de 1 grado de libertad, la cual primeramente, ha sido obtenida mediante la solución exacta y posteriormente, mediante la implementación del Método de Newmark.

El oscilador que se ha considerado posee las siguientes propiedades:

4.3. VALIDACIÓN DE LA INTEGRACIÓN EN EL TIEMPO DEL REGISTRO DE ACELERACIONES

$M [kg]$	100
$C [\frac{Ns}{m}]$	50
$K [\frac{N}{m}]$	250000
ξ	0.05
$F(t)$	$98sen(\omega_0 t)$
$\omega_0 [\frac{Rad}{s}]$	10

Tabla 4.7: Propiedades del oscilador utilizado en la validación.

La solución analítica de este oscilador ([10]) es la siguiente:

$$g(t) = \frac{\frac{F(t)}{K}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right) + \left(2\xi\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} sen(\omega_0 t), \quad (4.4)$$

donde ω_0 es la frecuencia de la fuerza externa.

Finalmente, en el siguiente gráfico se muestra la comparación de ambas respuestas, en donde se aprecia el buen comportamiento del método numérico, con respecto al comportamiento de la solución exacta.

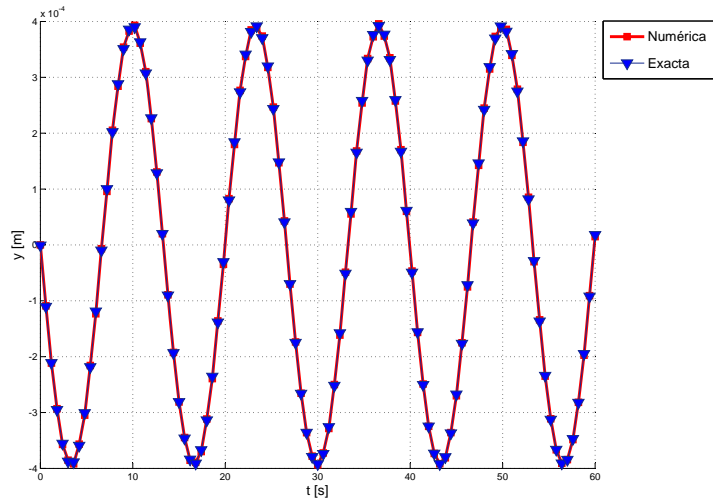


Figura 4.7: Ploteo de la respuesta otorgada por la solución exacta y numérica (Newmark).

Capítulo 5

Pograma MATLAB desarrollado para resolver el problema

Para resolver el problema ha sido necesario desarrollar un programa computacional en lenguaje MATLAB, en el cual se han considerado todas las variables explicadas anteriormente, tanto las del elemento MZC como las del elemento DKT, de manera de poder obtener tanto desplazamientos como tensiones en la losa. Estas tensiones pueden ser de origen estático, es decir, bajo producto de una carga repartida normal constante y de origen dinámico, producto de las fuerzas inerciales que pueden aparecer en la losa.

El programa ha sido desarrollado en lenguaje MATLAB, debido a que por una parte, posee herramientas matemáticas aptas para este problema, y por otra parte, permite crear una interfase gráfica que mejora la interacción con el usuario.

5.1. Diagramas de flujo del programa principal

5.1.1. Diagramas de flujo de la programación del caso estático

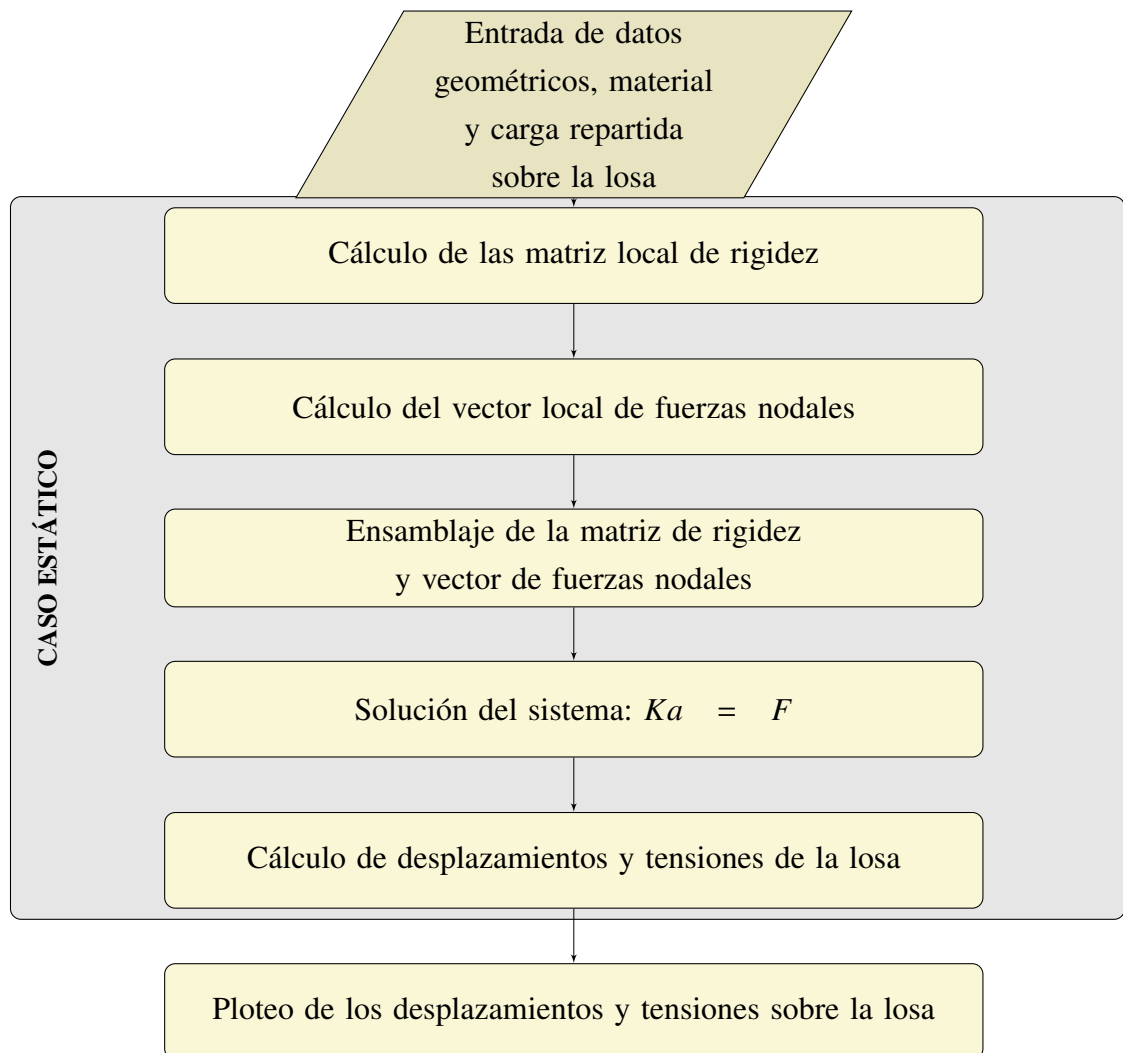


Figura 5.1: Diagrama de flujo para la programación del caso estático.

5.1.2. Diagramas de flujo de la programación del caso dinámico

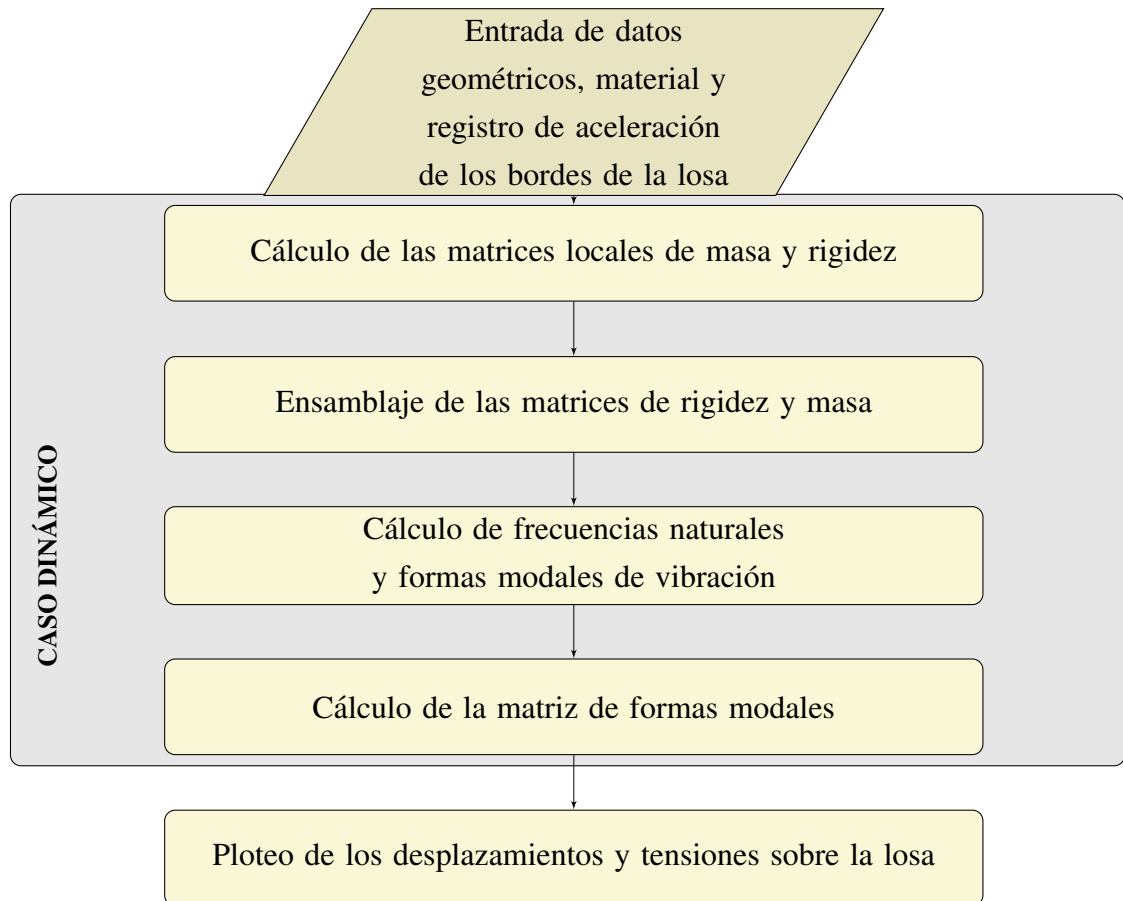


Figura 5.2: Diagrama de flujo para la programación del caso dinámico.

5.2. Descripción del programa

Para ejecutar el programa es necesario abrir MATLAB, y en el *Command Window* escribir: *Análisis de Losas2*, con esto se desplegará la siguiente ventana:

5.2. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA

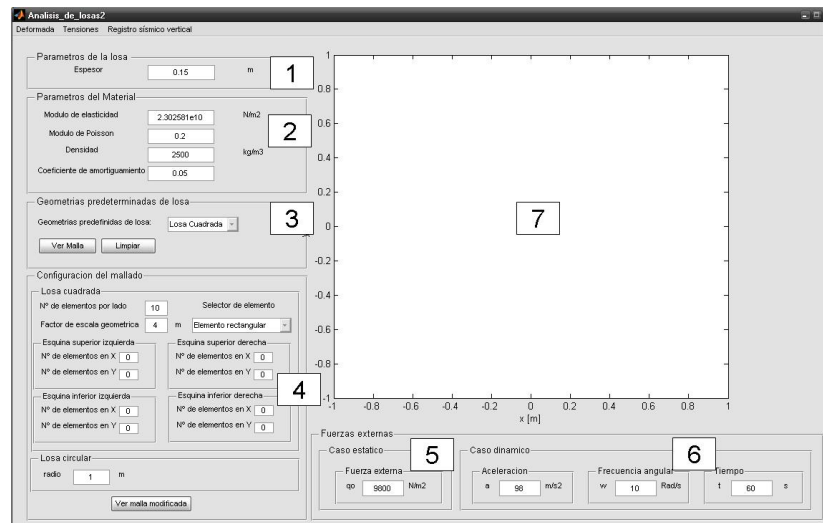


Figura 5.3: Interfase principal generada en MATLAB.

5.2.1. Entrada de datos

La figura 5.3 muestra la interfase gráfica dividida en siete partes o zonas, las cuales especifican los datos de entrada necesarios para la ejecución del programa.

1. Ingreso del espesor de la losa en metros.
2. Ingreso de los parámetros del material, los cuales son: Módulo de elasticidad en $\frac{N}{m^2}$, Modulo de Poisson, Densidad $\frac{Kg}{m^3}$ en y coeficiente de amortiguación.
3. Controles para la definición de una geometría predefinida, la cual es una losa cuadrada de 10 divisiones por lado o circular de radio 1[m].
4. Ingreso de datos para la modificación de la geometría predefinida anterior y para seleccionar el tipo de elemento.
5. Ingreso de la fuerza externa (válida solo para el caso estático).
6. Ingreso de parámetros para una aceleración vertical externa sinusoidal aplicada sobre el borde de la losa.
7. Pantalla gráfica para ver la malla de elementos finitos, ya sea rectangular o triangular.

5.2.2. Ejecución y entrega de resultados del programa

5.2.2.1. Ejecución y entrega de resultados para el caso estático

El programa entrega ploteos de la deformada y tensiones: σ_x , σ_y y τ_{xy} bajo cualquier valor de carga repartida uniforme, para condiciones de borde de losa empotrada en sus extremos.

Una vez ingresados los datos de entrada, es posible visualizar la deformada “clickeando” en las siguientes pestañas desplegables:

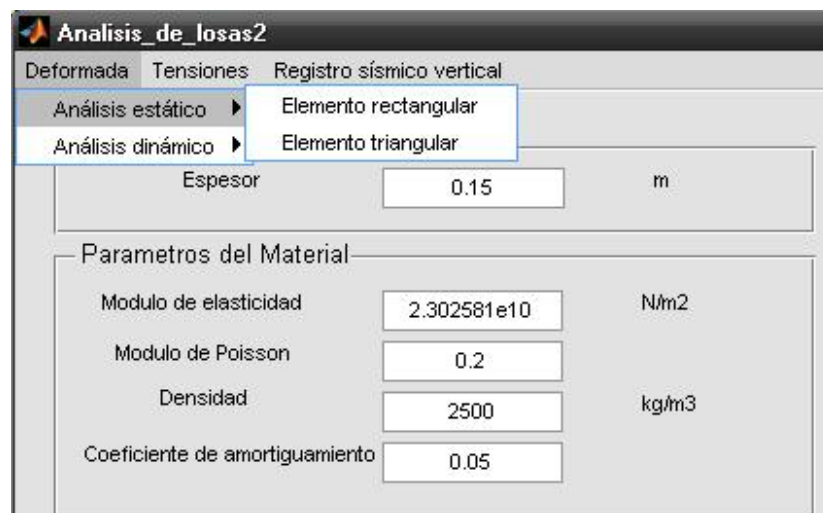


Figura 5.4: Ubicación de las pestañas desplegables de la deformada dentro del programa.

Para la visualización del ploteo de tensiones se debe acceder a la siguiente pestaña, la cual acciona una subrutina que calcula y gráfica las tensiones sobre la losa.

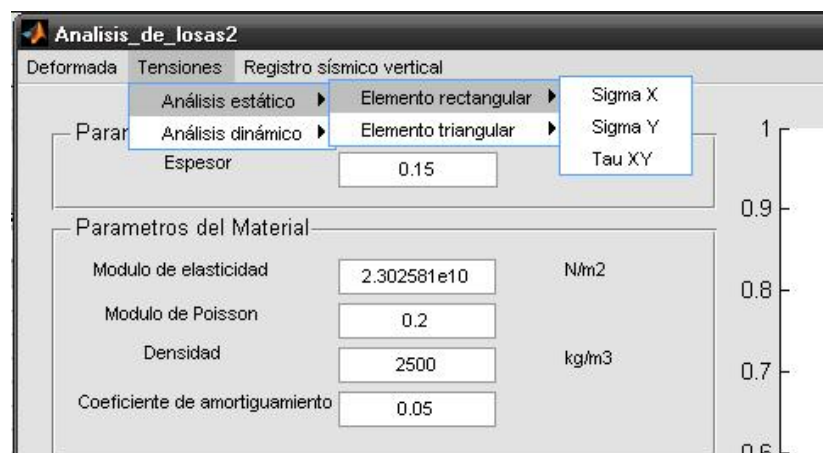


Figura 5.5: Ubicación de las pestañas desplegables para el cálculo de tensiones.

5.2. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA

5.2.2.2. Ejecución y entrega de resultados para el caso dinámico

El análisis dinámico que se puede realizar en el programa consiste en una visualización de la deformada de la losa y su respectiva envolvente de tensiones, bajo la aplicación de una aceleración vertical sobre sus bordes (particularmente del registro vertical de aceleraciones del terremoto del 27 de Febrero del 2010) teniendo en cuenta que las fuerzas presentes en este análisis son sólo las fuerzas inerciales producto de la masa de la losa.

5.2.2.2.1. Análisis dinámico de la losa sometida a una aceleración vertical sobre su borde

Primeramente, se deben ingresar los datos del material y geométricos de la losa en la ventana principal del programa (figura 5.3) y luego, los datos de la aceleración vertical del borde, los cuales se deben ingresar en la zona N° 7 de la ventana principal del programa, tal como se muestra en la siguiente figura:

The image shows a software window titled "Caso dinamico". Inside, there are three input sections:

- Aceleracion:** A label "a" followed by a text box containing the value "98" and the unit "m/s2".
- Frecuencia angular:** A label "w" followed by a text box containing the value "10" and the unit "Rad/s".
- Tiempo:** A label "t" followed by a text box containing the value "60" and the unit "s".

Figura 5.6: Ventana de ingreso de los parámetros de la aceleración del borde.

Para visualizar la simulación de la deformada de la losa en el tiempo se debe acceder a las siguientes pestañas desplegables:

5.2. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA

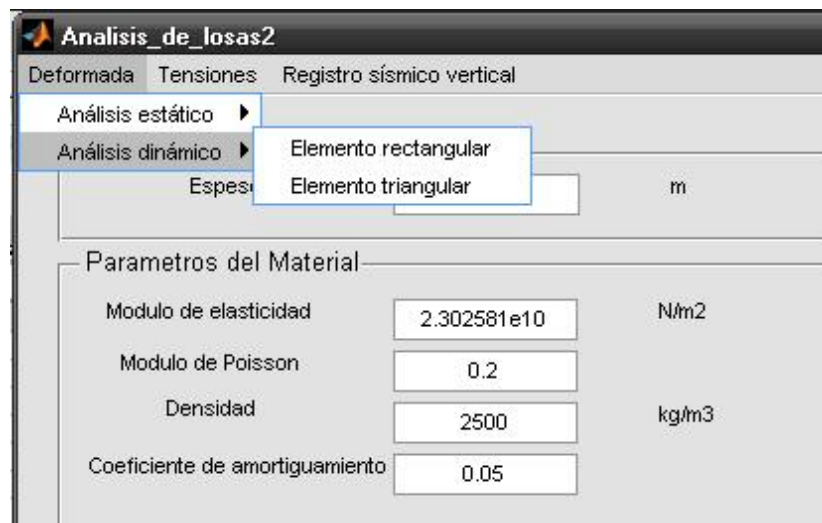


Figura 5.7: Pestañas desplegadas para accionar la visualización de la deformada.

Para obtener la envolvente de tensiones se debe acceder a las siguientes pestañas:

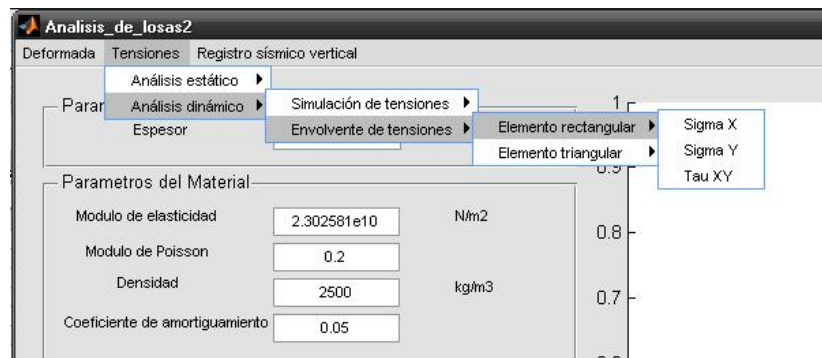


Figura 5.8: Pestañas desplegadas para accionar la visualización de la envolvente de tensiones.

5.2.2.2.2. Análisis dinámico de la losa sometida al registro de aceleraciones verticales del terremoto del 27 de Febrero del 2010

Para visualizar la deformada en el tiempo de la losa producto de la aplicación del registro de aceleraciones verticales del terremoto del 27 de Febrero del 2010, se debe acceder a las siguientes pestañas desplegadas:

5.2. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA

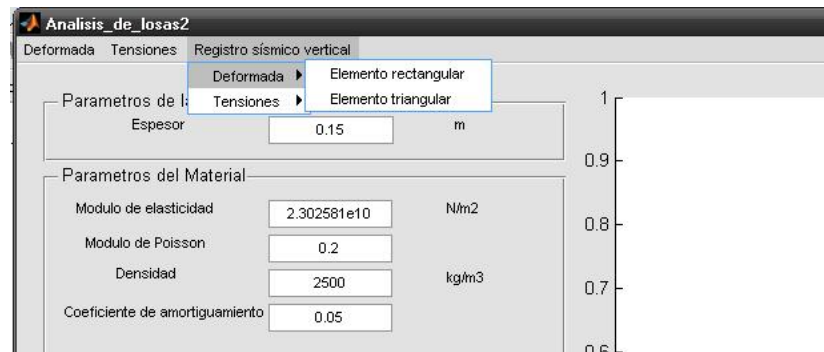


Figura 5.9: Pestaña desplegable para ejecutar la deformada en el tiempo de la losa.

Para visualizar las envolventes de tensiones de la losa σ_x , σ_y y τ_{xy} producto de la aplicación del registro de aceleraciones verticales del terremoto, se debe acceder a las siguientes pestañas desplegables:

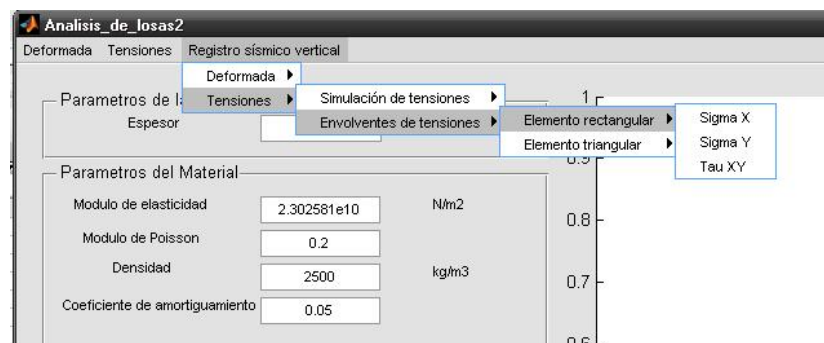


Figura 5.10: Pestaña desplegable para visualizar las envolventes de tensiones de la losa.

Capítulo 6

Aplicación del programa

En este capítulo, se muestran varios ejemplos de aplicación del programa. El primero de ellos es un ejemplo del caso estático y luego uno del caso dinámico. Finalmente, se ha llevado a cabo un análisis comparativo de una losa en particular, la cual se ha sometido al registro de aceleraciones verticales del terremoto del 27 de Febrero del 2010, pero, teniendo en cuenta el punto 5.5.1 de la norma chilena oficial NCh 433.Of96: *Diseño sísmico de edificios*. Además se ha realizado un análisis estático de la losa, en donde se le ha aplicado una carga repartida uniforme, tal como dicta la norma chilena oficial NCh 1537.Of86: *Diseño estructural de edificios-Cargas permanentes y sobrecargas de uso*, con el objetivo de realizar una comparación entre la respuesta sísmica y estática de la losa.

6.1. Ejemplos de aplicación del programa para el caso estático

1. En este ejemplo se muestra un ploteo de la deformada de la siguiente losa:

6.1. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL CASO ESTÁTICO

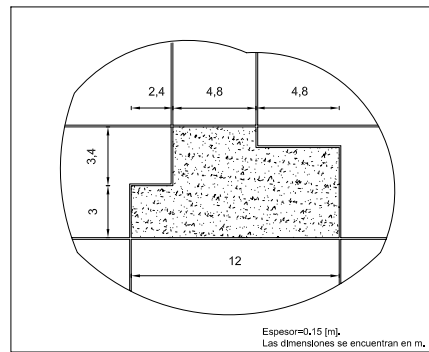


Figura 6.1: Esquema de la geometría de la losa analizada.

Condiciones de borde	Empotrada en todos los bordes
Nº de nodos	961
Espesor [m]	0,15
$E \left[\frac{N}{m^2} \right]$	$2,302581 \times 10^{10}$
ν	0.2
$q \left[\frac{N}{m^2} \right]$	9800

Tabla 6.1: Tabla inputs necesarios para ejecutar el programa.

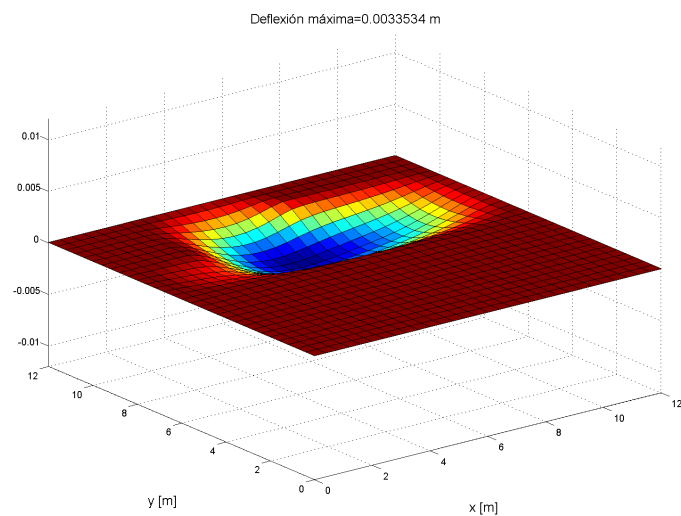


Figura 6.2: Deformada de losa discretizada con elementos rectangulares.

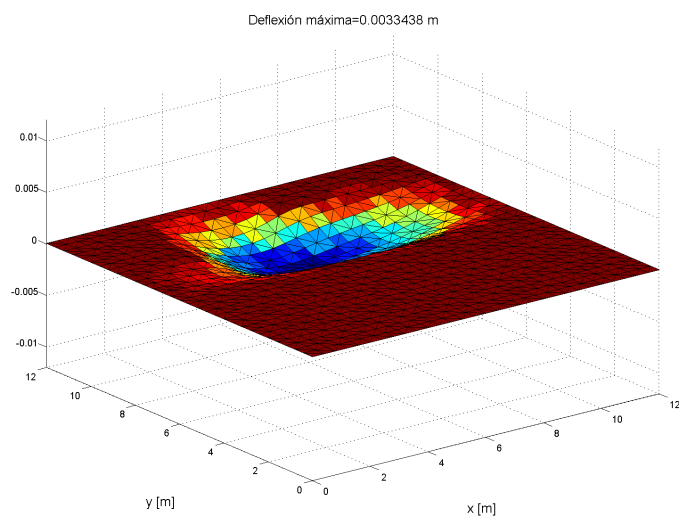
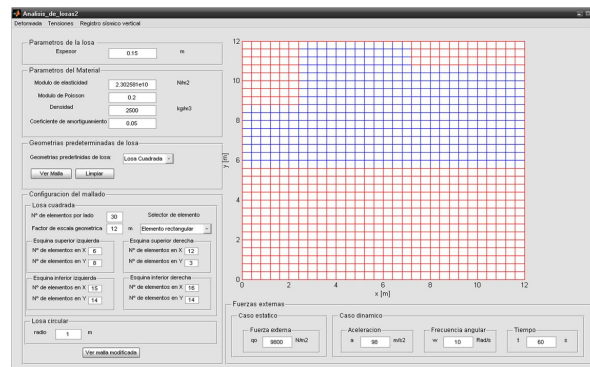


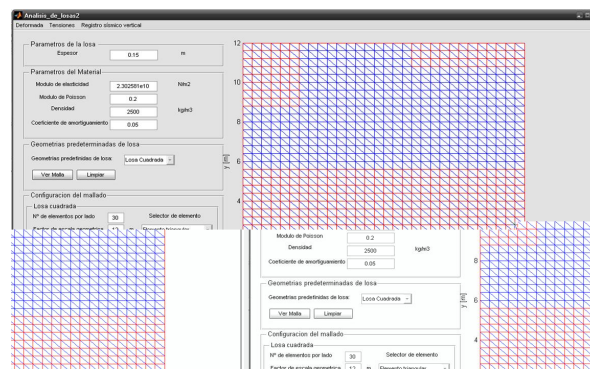
Figura 6.3: Deformada de losa discretizada con elementos triangulares.

El mallado que se ha utilizado en los ejemplos anteriores son los siguientes:

6.1. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL CASO ESTÁTICO



(a)



(b)

Figura 6.4: a) Mallado con elementos rectangulares. b) Mallado con elementos triangulares.

- En el siguiente ejemplo se muestra el ploteo de la deformada de una losa circular, la cual se muestra en la siguiente figura:

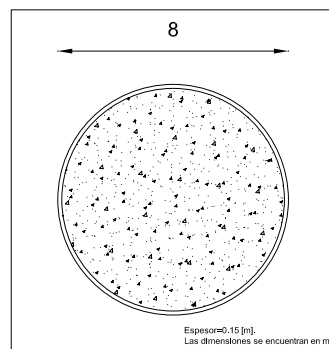


Figura 6.5: Esquema de la geometría de la losa circular analizada.

6.1. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL CASO ESTÁTICO

Condiciones de borde	Empotrada en todos los bordes
Nº de nodos	144
Espesor [m]	0,15
$E [\frac{N}{m^2}]$	$2,302581 \times 10^{10}$
ν	0,2
$q [\frac{N}{m^2}]$	9800

Tabla 6.2: Tabla inputs necesarios para ejecutar el programa.

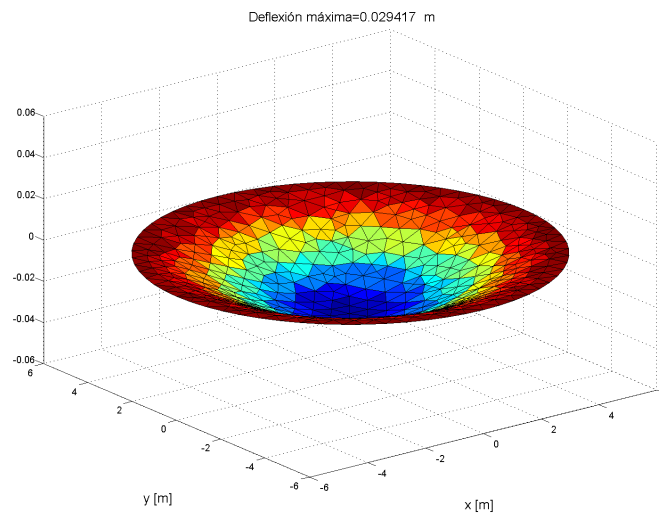


Figura 6.6: Deformada de losa circular discretizada con elementos triangulares.

3. En este ejemplo se muestran plots de las tensiones de la losa de la figura 6.7, en la cual se han utilizado los mismos parámetros del material que aparecen en la tabla 6.1.

6.1. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL CASO ESTÁTICO

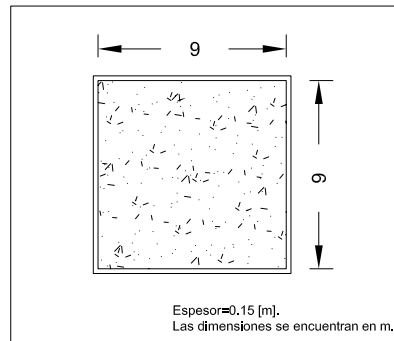


Figura 6.7: Esquema de la geometría de la losa analizada.

Elemento rectangular

Nº Nodos	σ_x Máximo [$\frac{kg}{cm^2}$]	σ_x Mínimo [$\frac{kg}{cm^2}$]
121	49.0616	-24.3490
256	51.9191	-23.9715
441	53.9416	-24.3559
676	54.8175	-24.2182
961	55.6353	-24.3566
1296	56.0555	-24.2862
1681	56.4960	-24.3567
2116	56.7420	-24.3141
2601	57.0170	-24.3568
3136	57.1783	-24.3283
3721	57.3662	-24.3568

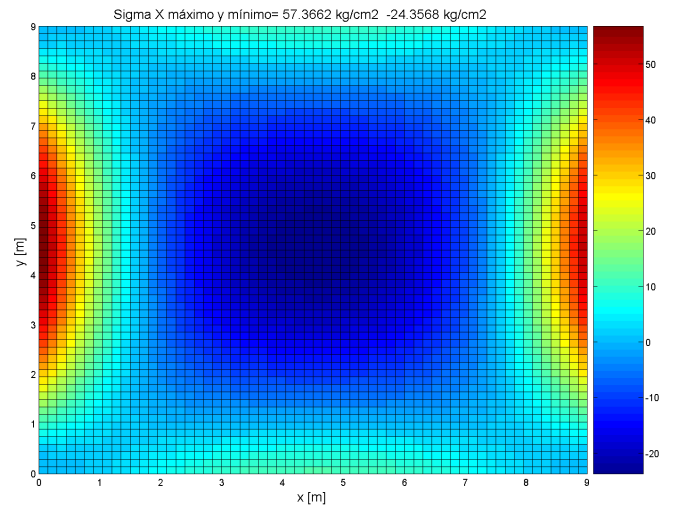


Figura 6.8: Tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

6.1. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL CASO ESTÁTICO

Nº Nodos	σ_y Máximo [$\frac{kg}{cm^2}$]	σ_y Mínimo [$\frac{kg}{cm^2}$]
121	49.0616	-24.3490
256	51.9191	-23.9715
441	53.9416	-24.3559
676	54.8175	-24.2182
961	55.6353	-24.3566
1296	56.0555	-24.2862
1681	56.4960	-24.3567
2116	56.7420	-24.3141
2601	57.0170	-24.3568
3136	57.1783	-24.3283
3721	57.3662	-24.3568

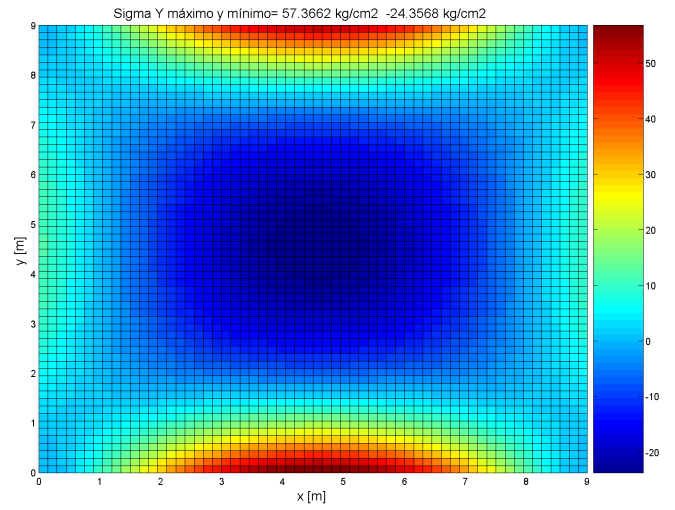


Figura 6.9: Tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

Nº Nodos	τ_{xy} Máximo [$\frac{kg}{cm^2}$]	τ_{xy} Mínimo [$\frac{kg}{cm^2}$]
121	11.1713	-11.1713
256	11.1831	-11.1831
441	11.1841	-11.1841
676	11.1839	-11.1839
961	11.1837	-11.1837
1296	11.1980	-11.1980
1681	11.2326	-11.2326
2116	11.2519	-11.2519
2601	11.2626	-11.2626
3136	11.2683	-11.2683
3721	11.2710	-11.2710

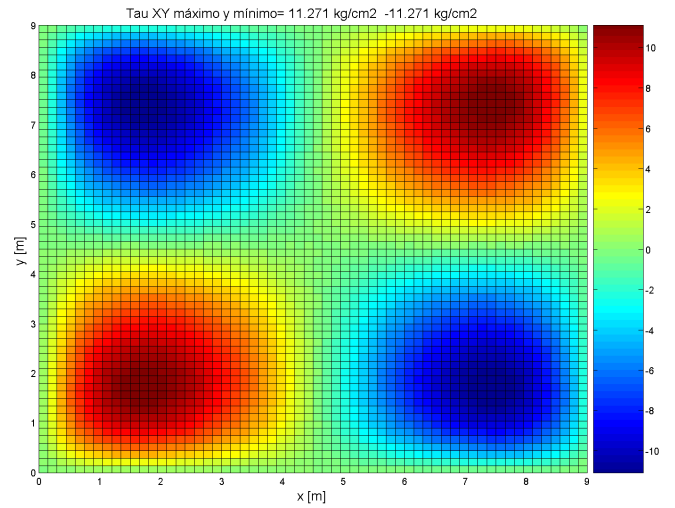


Figura 6.10: Tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

6.1. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL CASO ESTÁTICO

Elemento triangular

Nº Nodos	σ_x Máximo [$\frac{kg}{cm^2}$]	σ_x Mínimo [$\frac{kg}{cm^2}$]
121	41.4292	-24.1535
256	46.3533	-23.8840
441	49.4670	-24.3091
676	51.1768	-24.1880
961	52.4976	-24.3359
1296	53.3563	-24.2709
1681	54.0836	-24.3452
2116	54.5987	-24.3049
2601	55.0585	-24.3494
3136	55.4041	-24.3221
3721	55.7183	-24.3571

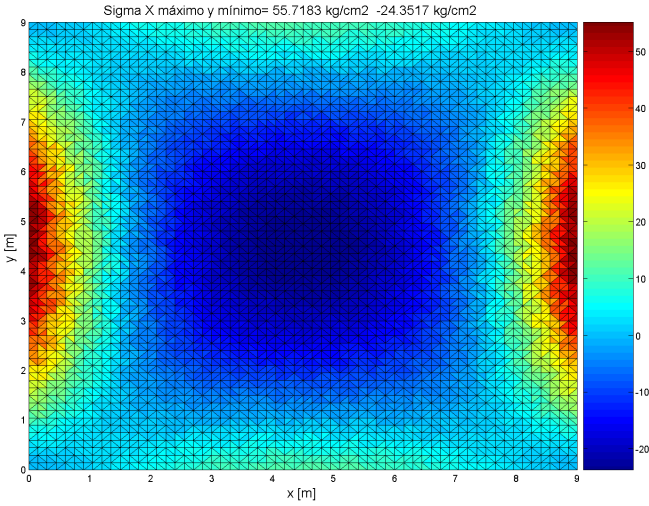


Figura 6.11: Tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

Nº Nodos	σ_y Máximo [$\frac{kg}{cm^2}$]	σ_y Mínimo [$\frac{kg}{cm^2}$]
121	44.1455	-23.7180
256	49.1560	-23.6936
441	51.3466	-24.1985
676	52.9683	-24.1178
961	53.8786	-24.2866
1296	54.6733	-24.2349
1681	55.1694	-24.3174
2116	55.6400	-24.2831
2601	55.9516	-24.3317
3136	56.2625	-24.3075
3721	56.4772	-24.3394

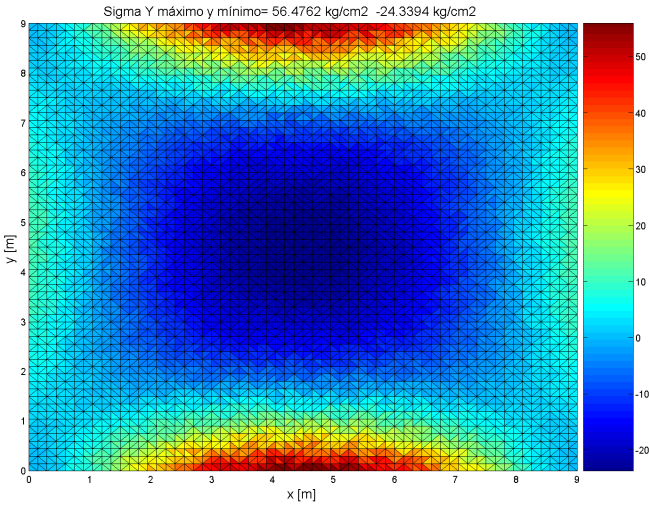


Figura 6.12: Tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

6.1. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL CASO ESTÁTICO

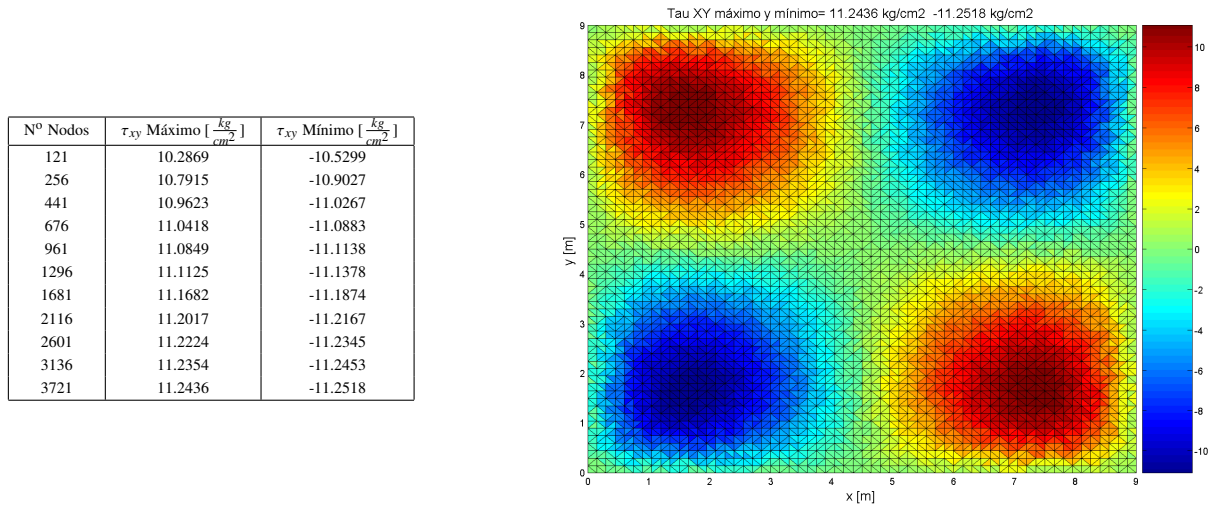
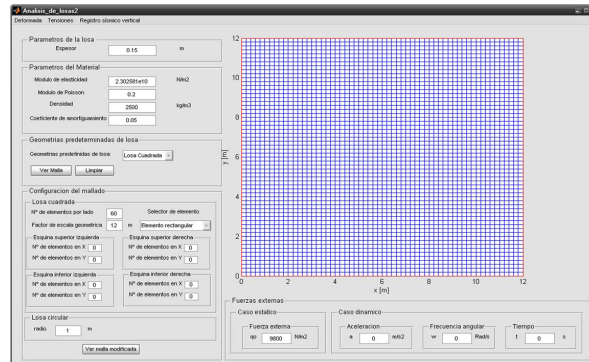


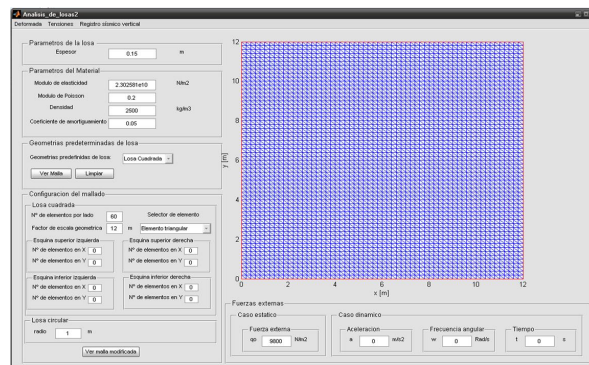
Figura 6.13: Tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

6.2. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL CASO DINÁMICO

El mallado que se ha utilizado es el siguiente:



(a)



(b)

Figura 6.14: a) Mallado con elementos rectangulares. b) Mallado con elementos triangulares.

6.2. Ejemplos de aplicación del programa para el caso dinámico

1. En este ejemplo se muestra el envolvente de tensiones sobre una losa (figura 6.15) producto de la aplicación de un registro sinusoidal de aceleraciones verticales, las cuales corresponden al registro de las tensiones máximas producidas en la losa, durante la aplicación de un registro de aceleraciones verticales, como por ejemplo las de un terremoto.

6.2. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL CASO DINÁMICO

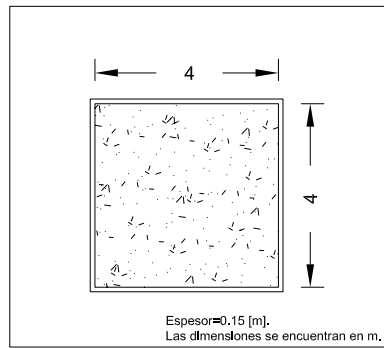


Figura 6.15: Esquema de la geomtría de la losa analizada.

Condiciones de Borde	empotrada en todos sus bordes
Nº de nodos	3136
Espesor [m]	0,15
$E [\frac{N}{m^2}]$	$2,302581 \times 10^{10}$
ν	0,2
Aceleración del borde	$9,8 \sin(t)$

Tabla 6.3: Tabla inputs necesarios para obtener la envolvente de tensiones.

6.2. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL CASO DINÁMICO

El acelerograma que se ha utilizado es el siguiente:

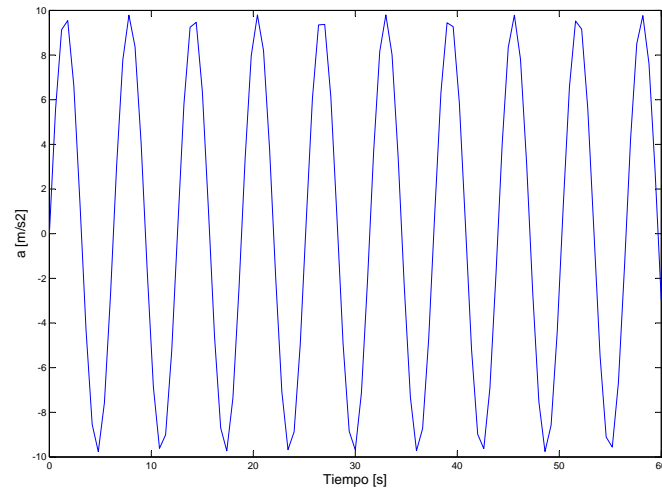


Figura 6.16: Registro de aceleraciones verticales.

Las envolventes de tensiones son las siguientes:

Elemento rectangular

Nº Nodos	σ_x Máximo Positivo [$\frac{kg}{cm^2}$]	σ_x Máximo Negativo [$\frac{kg}{cm^2}$]
121	3.5913	-3.5775
256	3.8300	-3.8153
441	3.9900	-3.9747
676	4.0597	-4.0441
961	4.1230	-4.1072
1296	4.1558	-4.1399
1681	4.1896	-4.1735
2116	4.2086	-4.1924
2601	4.2295	-4.2133
3136	4.2419	-4.2419

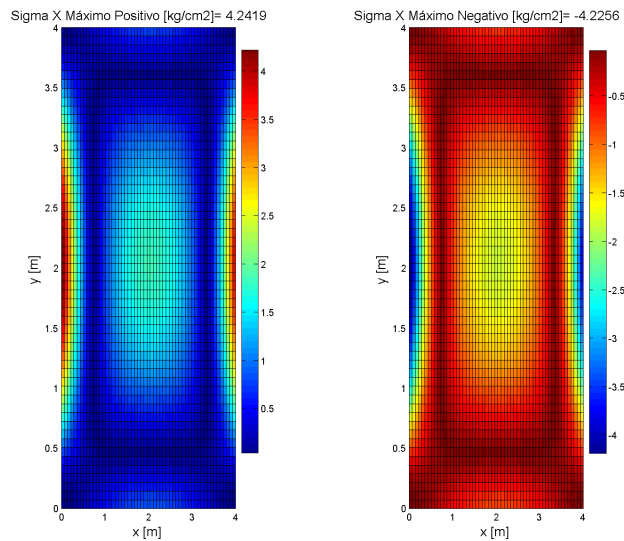


Figura 6.17: Envolvente de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

6.2. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL CASO DINÁMICO

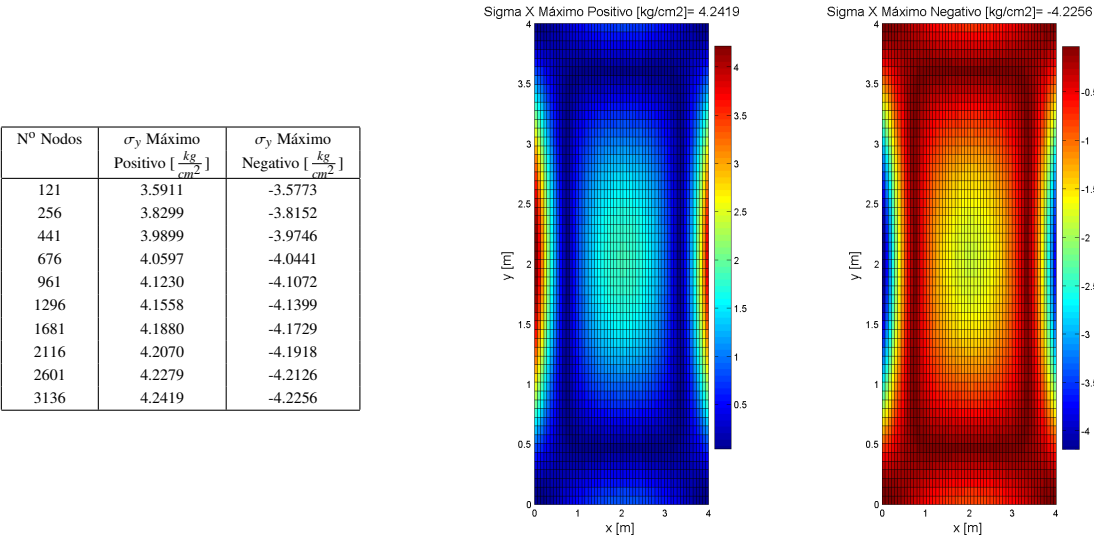


Figura 6.18: Envolvente de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

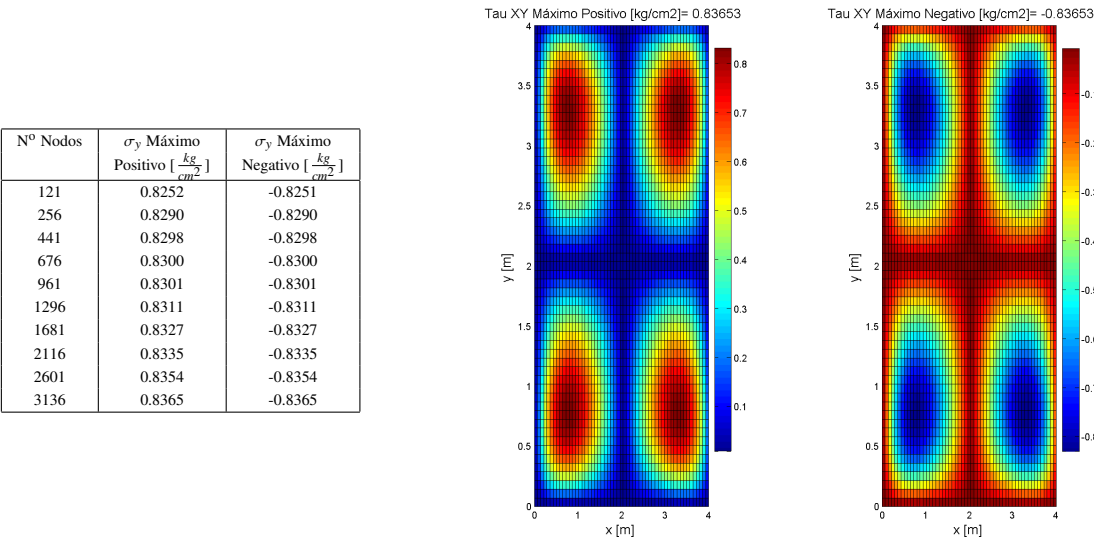


Figura 6.19: Envolvente de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

6.2. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL CASO DINÁMICO

Elemento triangular

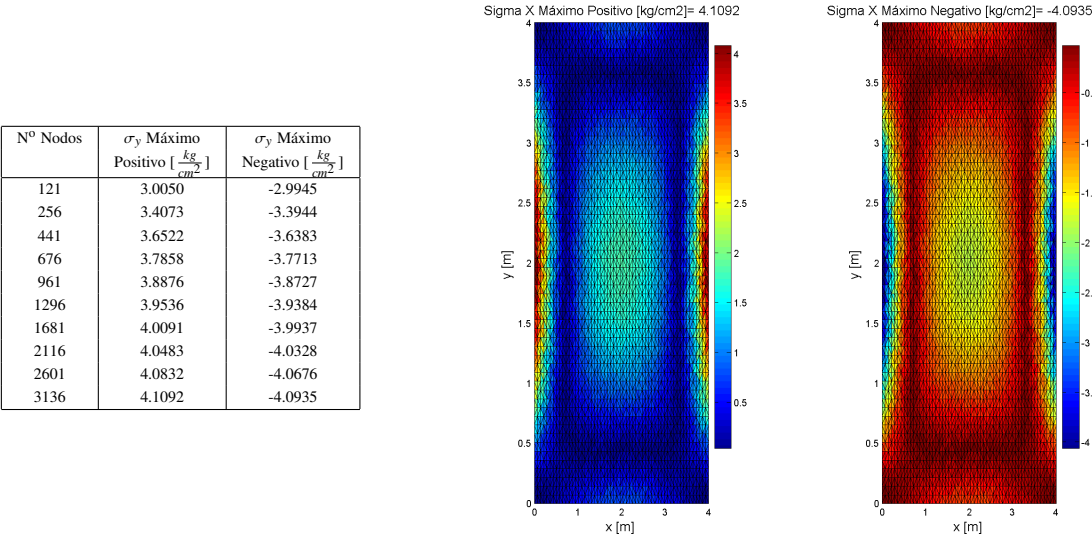


Figura 6.20: Envolvente de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

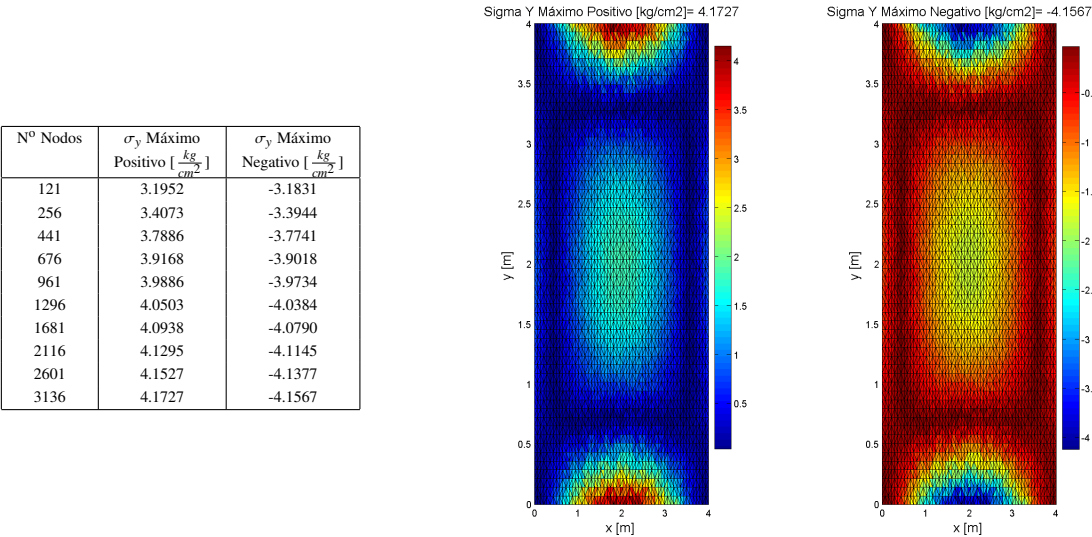


Figura 6.21: Envolvente de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

6.2. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL CASO DINÁMICO

Nº Nodos	σ_y Máximo Positivo [$\frac{kg}{cm^2}$]	σ_y Máximo Negativo [$\frac{kg}{cm^2}$]
121	0.7684	-0.7713
256	0.8031	-0.8061
441	0.8141	-0.8172
676	0.8191	-0.8221
961	0.8225	-0.8247
1296	0.8246	-0.8265
1681	0.8278	-0.8187
2116	0.8294	-0.8220
2601	0.8304	-0.8309
3136	0.8340	-0.8347

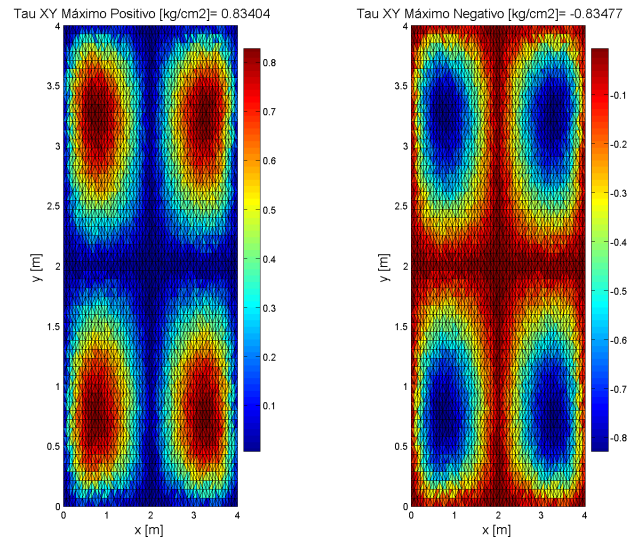
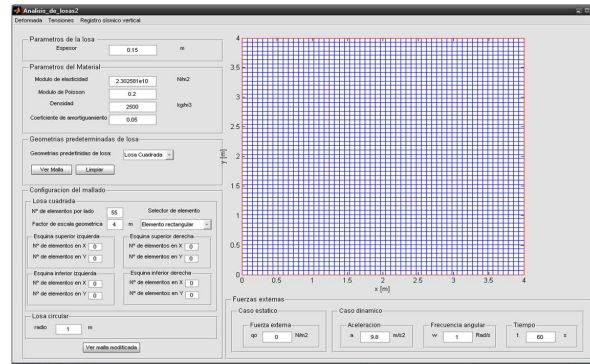


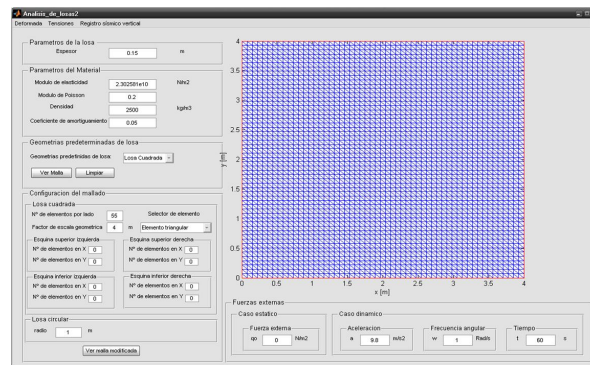
Figura 6.22: Envolvente de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

El mallado de elementos finitos que se ha utilizado en este ejemplo es el siguiente:

6.2. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA PARA EL CASO DINÁMICO



(a)



(b)

Figura 6.23: a) Mallado con elementos rectangulares. b) Mallado con elementos triangulares.

De los ejemplos anteriores, los cuales muestran distribuciones y envolventes de tensiones, es posible observar que las tensiones máximas en losas cuadradas empotradas, surgen en el borde de estas, tanto para el caso estático como para el dinámico. También es posible visualizar, que las distribuciones de tensiones en losas cuadradas, tanto para el caso estático como para el dinámico, son muy similares entre si.

6.3. Análisis comparativo de la losa

El análisis consiste en la obtención de las envolventes de tensiones: σ_x , σ_y y τ_{xy} , producto de la aplicación de fuerzas dinámicas (terremoto) y estáticas sobre 2 losas distintas, con el objetivo de realizar una comparación de las tensiones que se generan sobre las losas tanto en el caso dinámico como en el estático.

En el caso dinámico, la carga sobre la losa corresponde al registro de aceleraciones verticales del terremoto del 27 de Febrero de 2010 y para el caso estático es la carga que especifica la norma chilena NCh 1537.Of86: *Diseño estructural de edificios, Cargas permanentes y sobrecargas de uso*, la cual en su tabla 3, especifica que la sobrecarga de uso uniformemente distribuida para pisos es de $2[kPa]$.

Para la correcta comparación de ambos casos, en el análisis sísmico de la losa, ha sido necesario tener en cuenta el punto 5.5.1 de la norma chilena oficial NCh 433Of96: *Diseño sísmico de edificios*, la cual dice que para el cálculo de masas se deben considerar las cargas permanentes más un porcentaje de la sobrecarga de uso, que no podrá ser inferior a 25 % en construcciones destinadas a la habitación o al uso público [12].

6.3.1. Características del material y condiciones de apoyo de la losa

Las características del material y condiciones de apoyo de la losa son las siguientes, las cuales son constantes durante el análisis.

Material	Hormigón armado (H-30)
Condiciones de Borde	empotrada en todos sus bordes
Espesor $[m]$	0,14
$E [\frac{N}{m^2}]$	$2,302581 \times 10^{10}$
ν	0,2

Tabla 6.4: Propiedades de la losa.

6.3.2. Características geométricas de la losa

Las características geométricas de las losas que se han analizado, se encuentran en la siguientes figuras:

6.3. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA LOSA

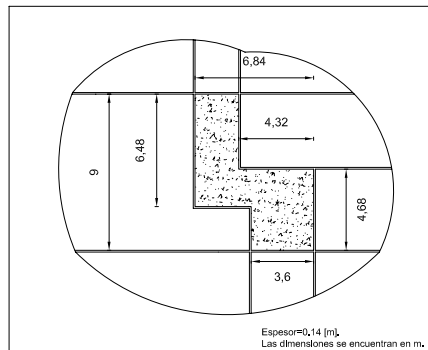


Figura 6.24: Vista en planta de la losa N°1.

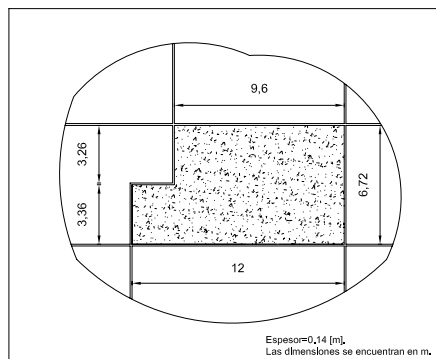


Figura 6.25: Vista en planta de la losa N°2.

6.3.3. Cargas sobre la losa

6.3.3.1. Carga estática sobre la losa

La carga estática uniformemente repartida sobre la losa corresponde a $2[kPa]$ más su peso propio.

6.3. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA LOSA

ρ Hormigón armado $\frac{kg}{m^3}$	2500
Espesor $[m]$	0,14
Aceleración de gravedad $[\frac{m}{s^2}]$	9,81
Sobrecarga de uso	2000 $[\frac{N}{m^2}]$
Peso propio losa	3433.5 $[\frac{N}{m^2}]$
Carga Total sobre losa	5433.5 $[\frac{N}{m^2}]$

Tabla 6.5: Carga estática utilizada en el análisis.

6.3.3.2. Carga dinámica sobre la losa

La carga dinámica sobre la losa corresponde al registro de aceleraciones verticales del terremoto del 27 de Febrero del 2010, el cual posee el siguiente registro:

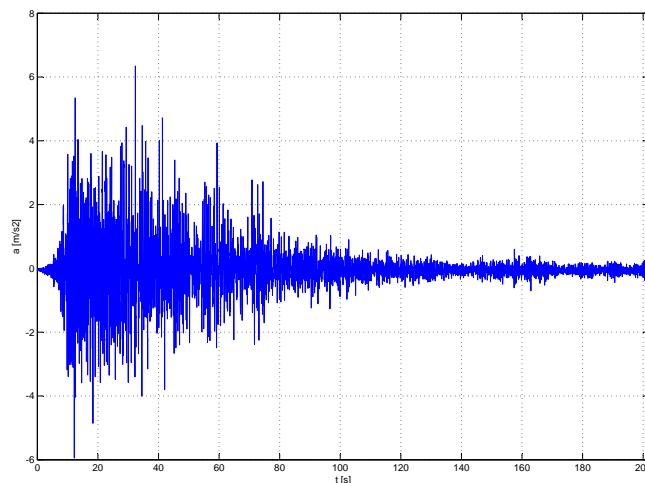


Figura 6.26: Registro de aceleraciones verticales del terremoto 27/02/2010.

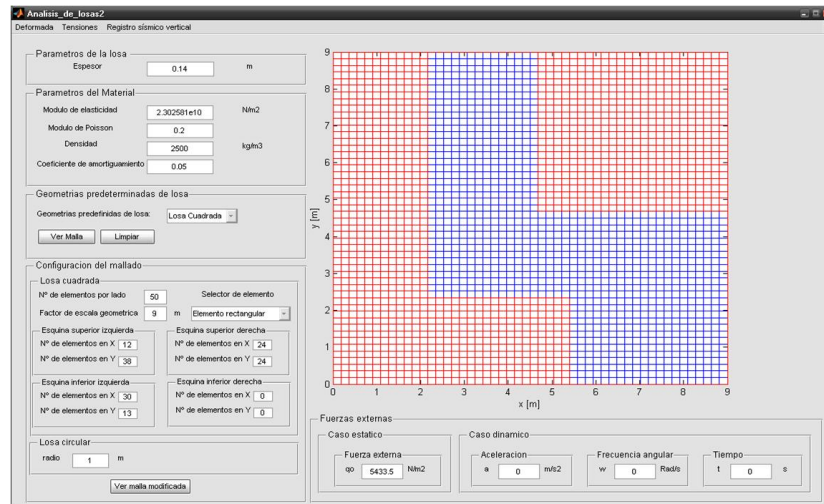
Se debe tener en cuenta en este caso, que la masa de la losa corresponde a su masa como tal más un 100 % de la sobrecarga de uso, la cual es de 2[kPa]. En este caso se ha utilizado el 100 % del valor de la sobrecarga debido a que es el caso más desfavorable.

6.3. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA LOSA

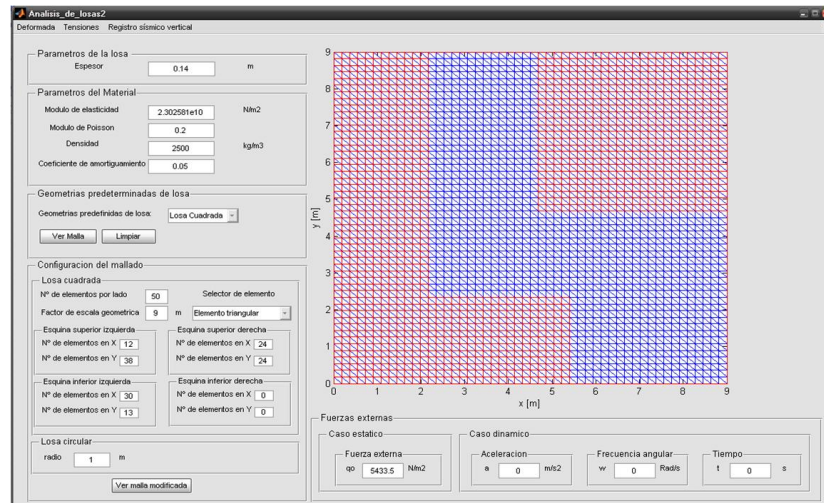
6.3.4. Mallado de Elementos Finitos

Las mallas de elementos finitos, tanto para el elemento rectangular como para el triangular, que han sido utilizadas en este análisis son las siguientes:

Losa N°1



(a)

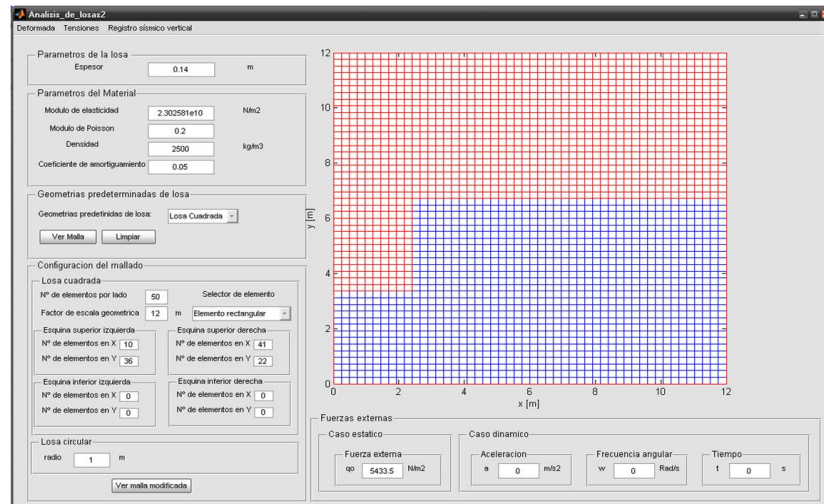


(b)

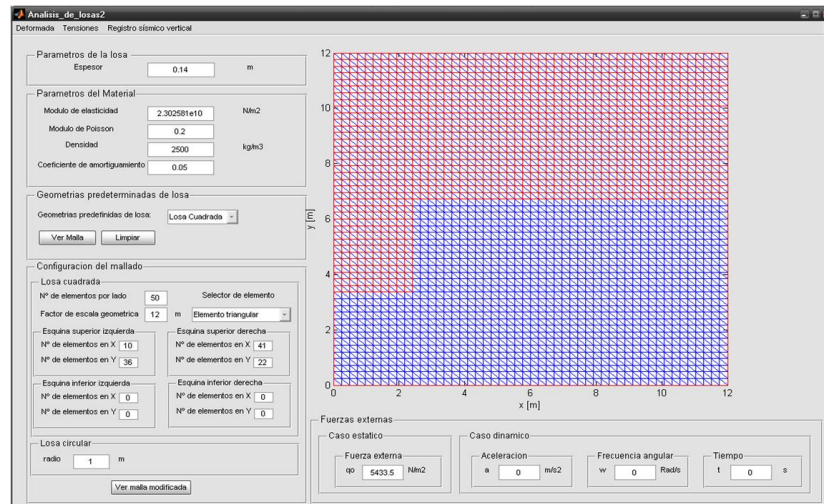
Figura 6.27: a) Mallado de elementos rectangulares para la losa N°1. b) Mallado de elementos triangulares para la losa N°1.

6.3. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA LOSA

Losa N°2



(a)



(b)

Figura 6.28: a) Malla de elementos rectangulares para la losa N°2. b) Malla de elementos triangulares para la losa N°2.

6.3.5. Análisis tensional para losa N°1

6.3.5.1. Distribución de tensiones para el caso estático

6.3.5.1.1. Distribución de tensiones obtenidas a partir del elemento MZC

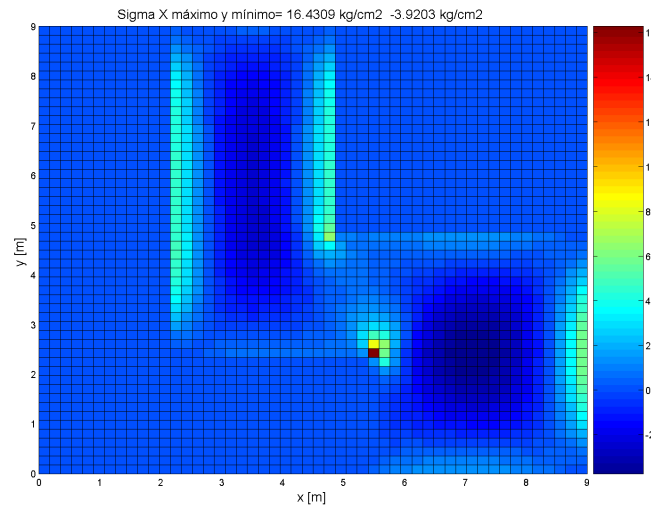


Figura 6.29: Distribución de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

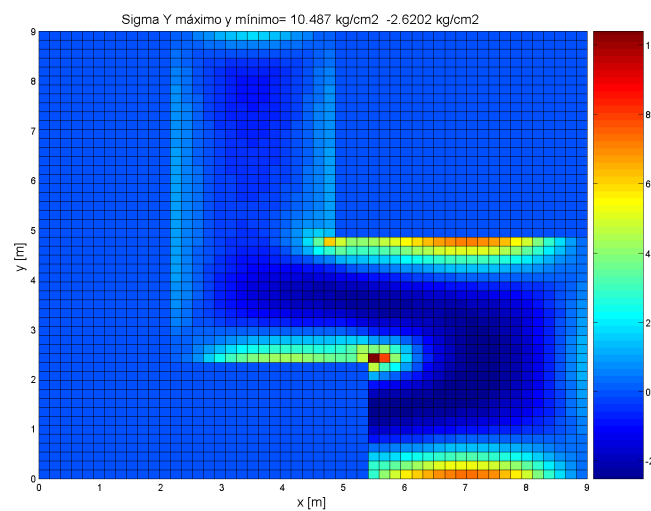


Figura 6.30: Distribución de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

6.3. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA LOSA

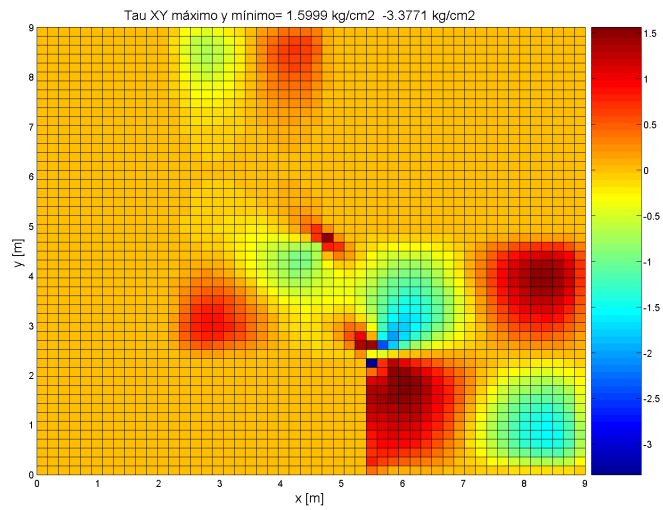


Figura 6.31: Distribución de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

6.3.5.1.2. Distribución de tensiones obtenidas a partir del elemento DKT

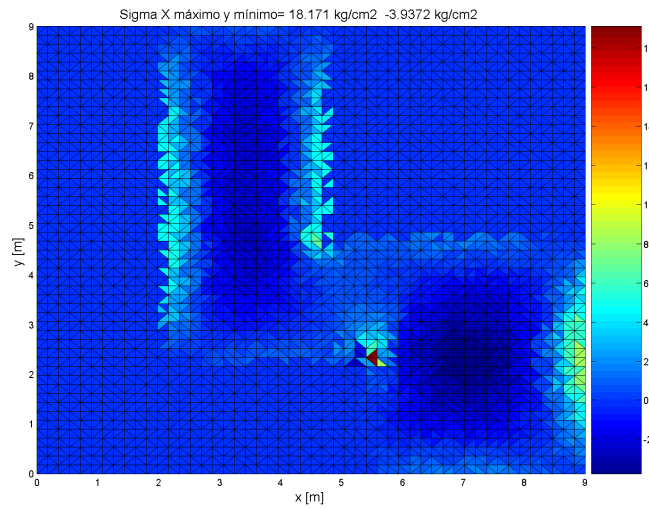


Figura 6.32: Distribución de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

6.3. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA LOSA

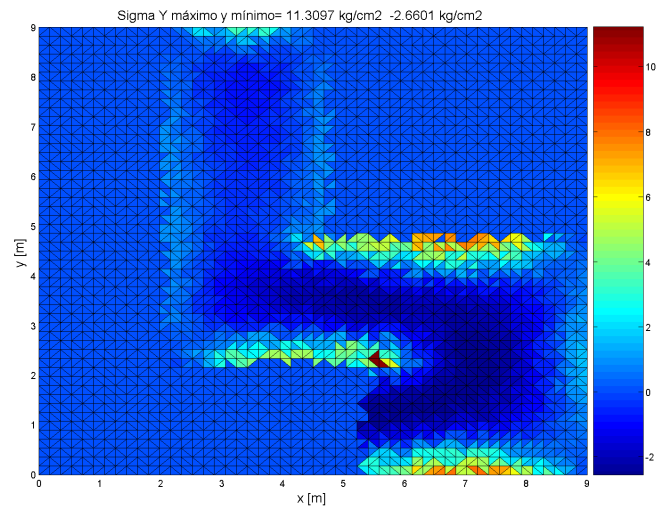


Figura 6.33: Distribución de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

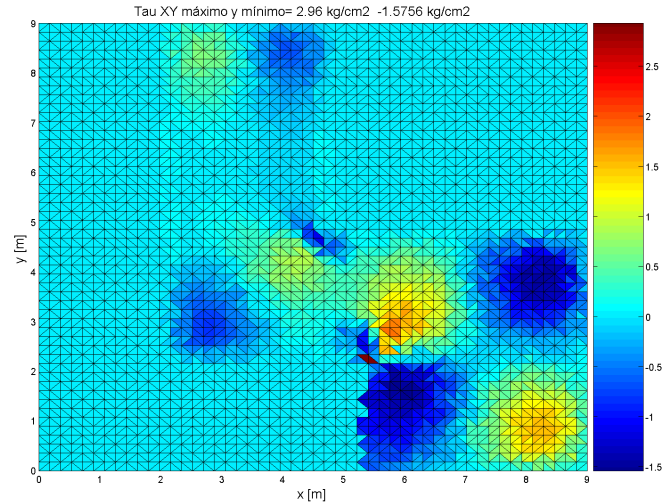


Figura 6.34: Distribución de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

6.3.5.2. Envoltentes de tensiones para el caso dinámico

6.3.5.2.1. Envoltentes obtenidas a partir del elemento MZC

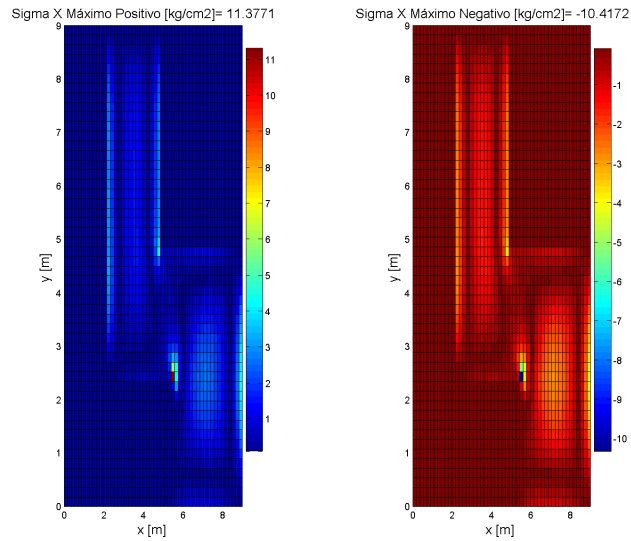


Figura 6.35: Envoltente de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

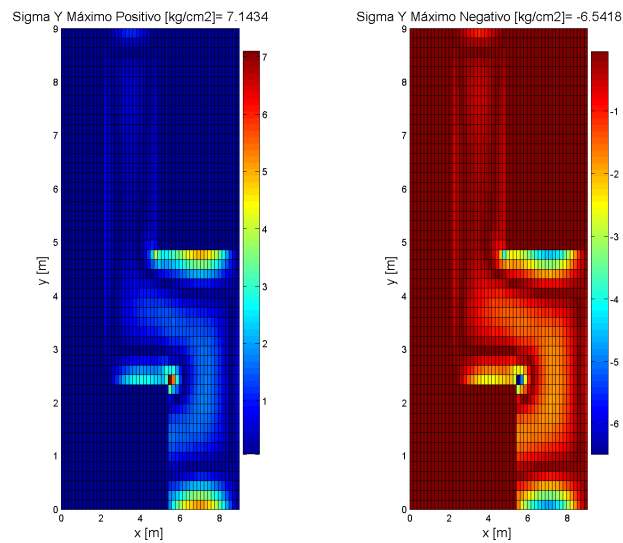


Figura 6.36: Envoltente de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

6.3. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA LOSA

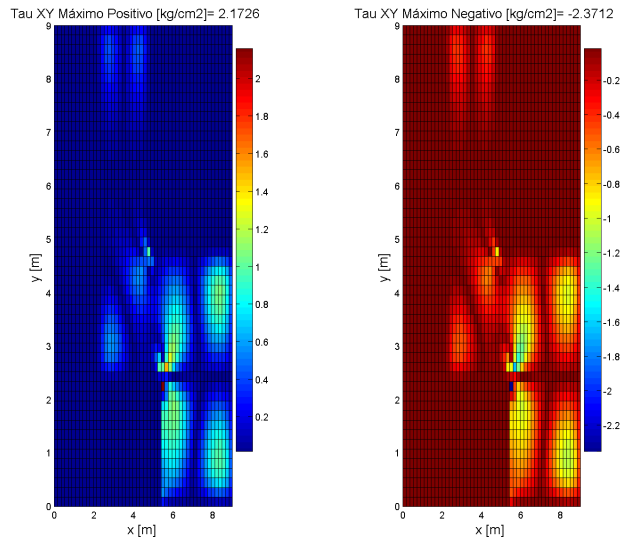


Figura 6.37: Envolvente de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

6.3.5.2.2. Envoltentes obtenidas a partir del elemento DKT

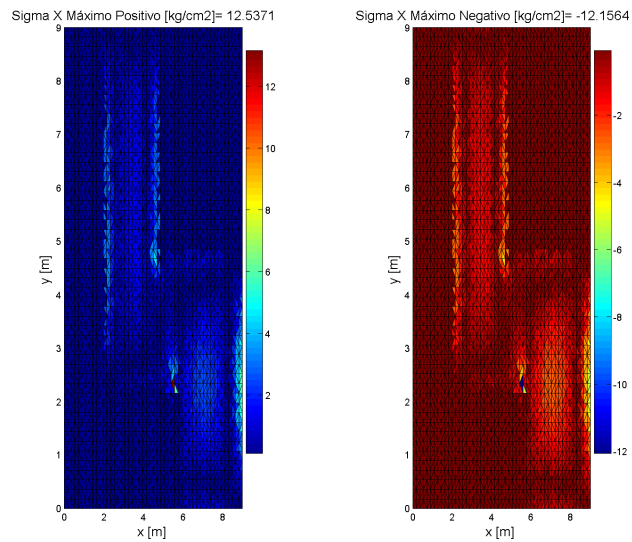


Figura 6.38: Envolvente de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

6.3. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA LOSA

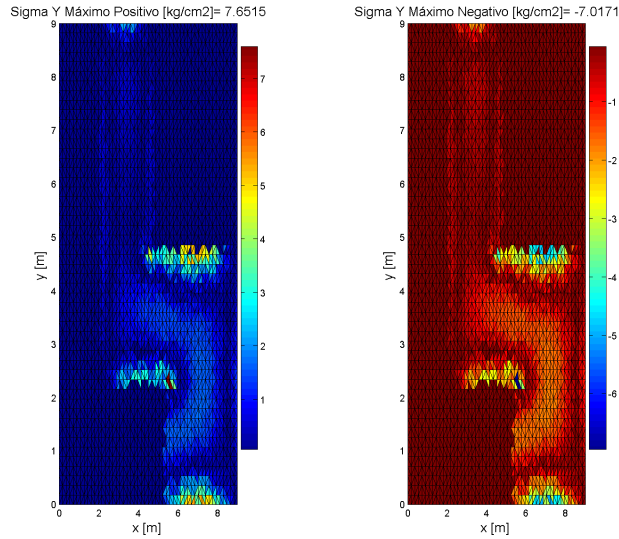


Figura 6.39: Envolvente de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

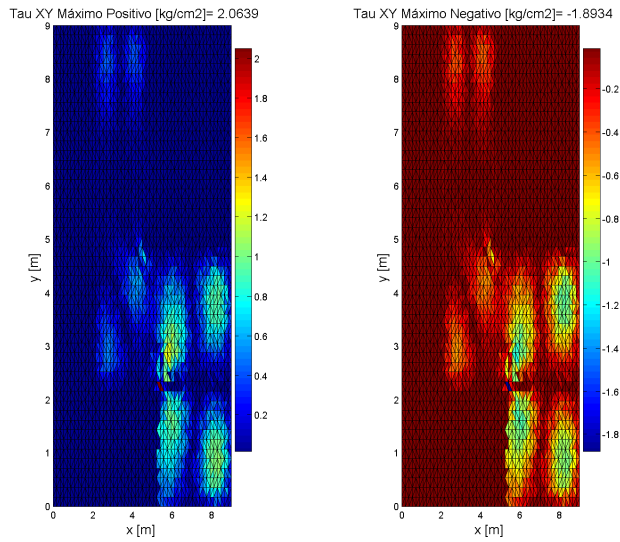


Figura 6.40: Envolvente de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

Las tensiones sobre esta losa para el caso estático son mayores a las que aparecen durante la aplicación del registro vertical del terremoto. También, se producen tensiones de tracción, compresión y corte: $\pm\sigma_x$, $\pm\sigma_y$, $\pm\tau_{xy}$ sobre la losa, a diferencia del caso estático.

6.3.6. Análisis tensional para losa N°2

6.3.6.1. Distribución de tensiones para el caso estático

6.3.6.1.1. Distribución de tensiones obtenidas a partir del elemento MZC

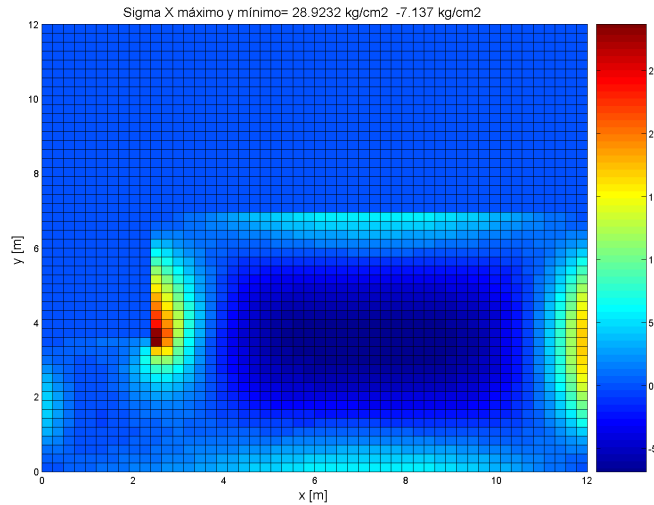


Figura 6.41: Distribución de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

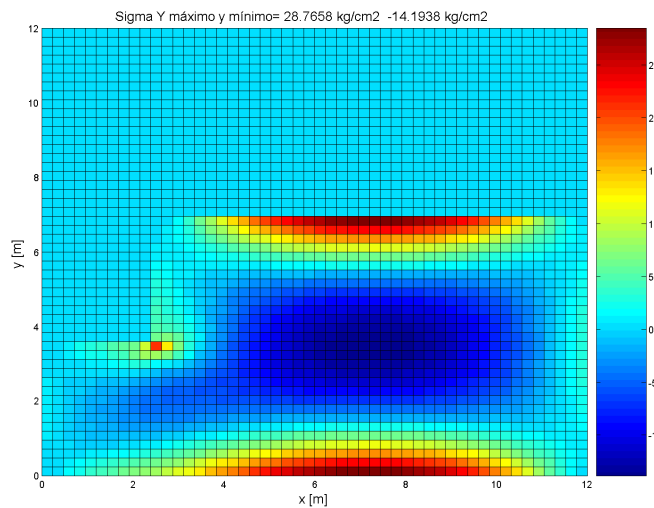


Figura 6.42: Distribución de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

6.3. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA LOSA

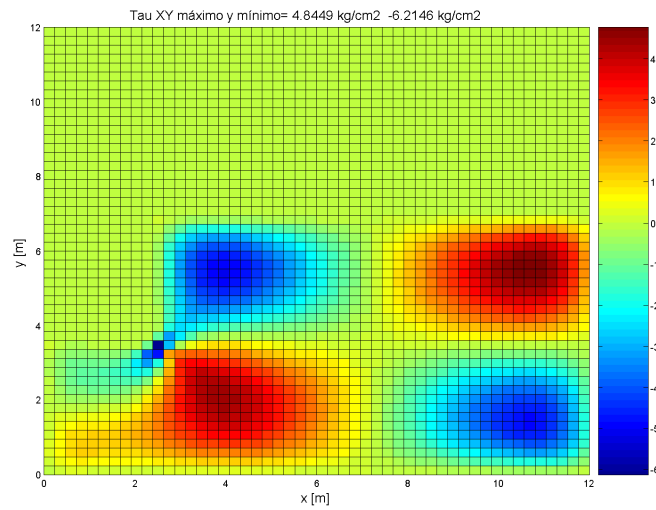


Figura 6.43: Distribución de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

6.3.6.1.2. Distribución de tensiones obtenidas a partir del elemento DKT

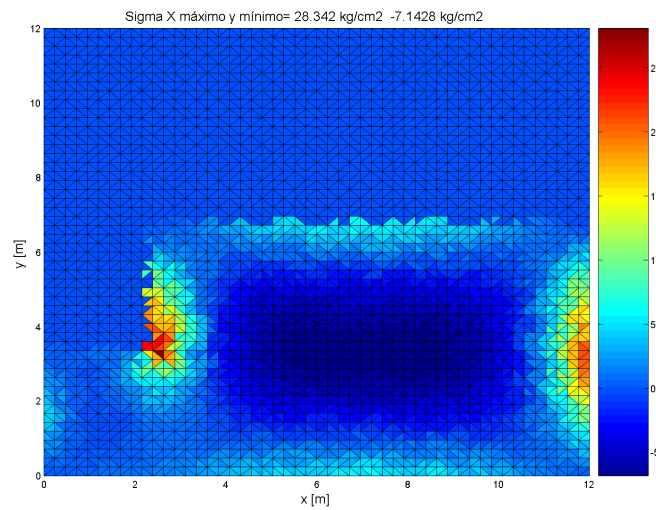


Figura 6.44: Distribución de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

6.3. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA LOSA

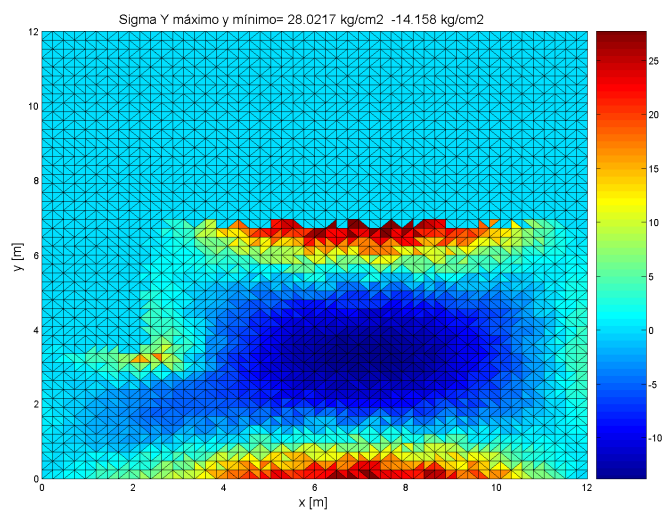


Figura 6.45: Distribución de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

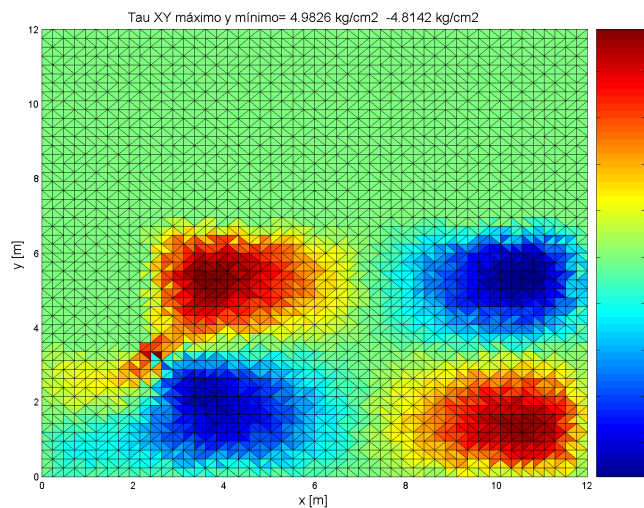


Figura 6.46: Distribución de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

6.3.6.2. Envoltentes de tensiones para el caso dinámico

6.3.6.2.1. Envoltentes obtenidas a partir del elemento MZC

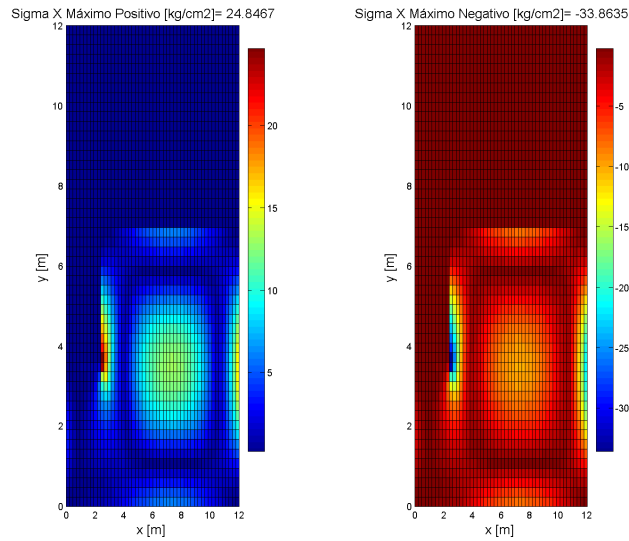


Figura 6.47: Envoltente de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

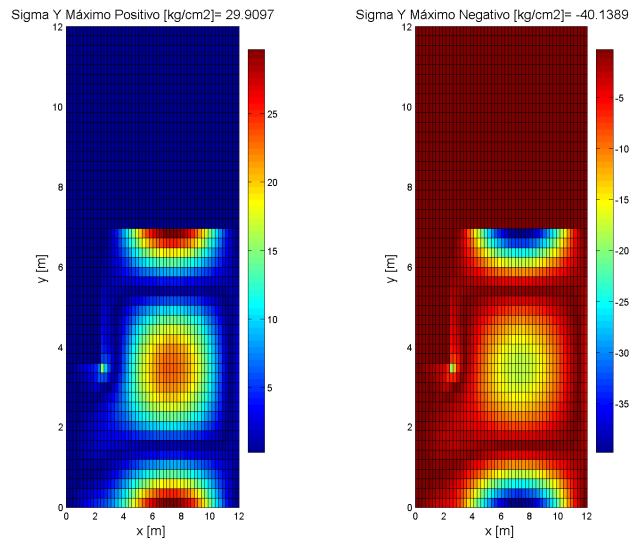


Figura 6.48: Envoltente de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

6.3. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA LOSA

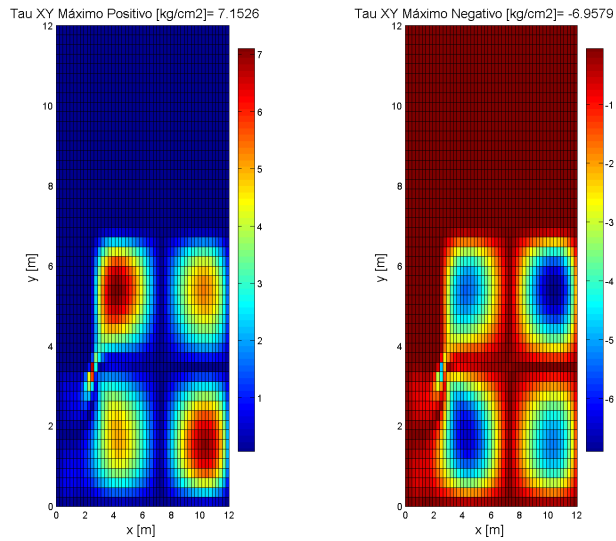


Figura 6.49: Envolvente de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos rectangulares.

6.3.6.2.2. Envoltentes obtenidas a partir del elemento DKT

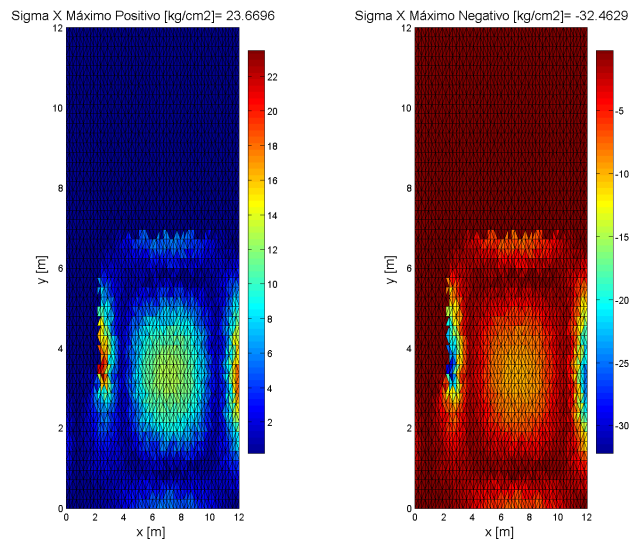


Figura 6.50: Envolvente de tensiones σ_x sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

6.3. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LA LOSA

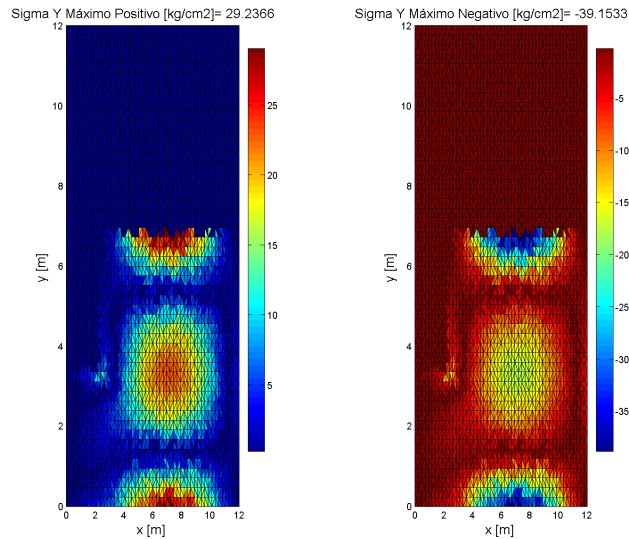


Figura 6.51: Envolvente de tensiones σ_y sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

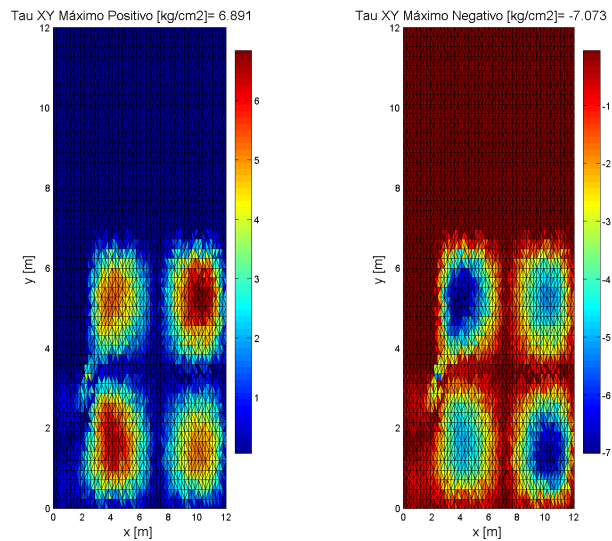


Figura 6.52: Envolvente de tensiones τ_{xy} sobre la losa discretizada con elementos triangulares.

En este caso, las tensiones que produce la aplicación del registro vertical del terremoto, son mayores a las que produce la aplicación de una carga estática vertical. Al igual que en el caso anterior, se producen tensiones de tracción, compresión y corte: $\pm\sigma_x$, $\pm\sigma_y$, $\pm\tau_{xy}$ sobre la losa, a diferencia del caso estático.

Capítulo 7

Conclusiones y recomendaciones

Como resultado final de este trabajo es posible establecer las siguientes conclusiones y recomendaciones:

1. La importancia de este trabajo es haber utilizado las teorías de placas, basadas en la elasticidad lineal, y la del movimiento de estructuras de 1 GDL para caracterizar el comportamiento dinámico de una losa de hormigón armado bajo las acción de un terremoto vertical, a través de la implementación de un programa computacional en lenguaje MATLAB, el cual permite obtener tanto desplazamientos verticales y tensiones: σ_x , σ_y y τ_{xy} que aparecen en la losa durante un terremoto vertical.
2. El método utilizado para resolver el problema es el Método de Elementos Finitos, lo que confirma que este método es bastante poderoso, no solo en lo que respecta al análisis de sistemas estructurales estáticos, sino que también sistemas estructurales dinámicos.
3. Una losa de hormigón armado se encuentra sometida a esfuerzos de tracción y compresión: $\pm\sigma_x, \pm\sigma_y$ durante un sismo con una componente de aceleración vertical importante, al igual que esfuerzos de corte: $\pm\tau_{xy}$.
4. Las tensiones máximas en losas cuadradas y rectangulares empotradas, surgen en el borde de estas, tanto para el caso estático como para el dinámico.
5. Las distribuciones de tensiones en losas cuadradas y rectangulares, tanto para el caso estático como para el dinámico, son muy similares entre si, ya que en ambos casos la carga proviene del peso propio y sobrecarga.

-
6. Las fibras de una losa que habitualmente se encuentran en compresión cuando se aplica una carga estática vertical, también lo están, temporalmente, en tracción y compresión durante la aplicación del registro vertical del terremoto. Al igual que, las fibras de una losa que habitualmente se encuentran en tracción cuando se aplica una carga estática vertical, también lo están, temporalmente, en compresión y tracción durante la aplicación del mismo registro.
 7. Las tensiones que se producen en la losa N°1 (ver página 88), por efecto de la aplicación del registro de aceleraciones del terremoto, son menores a las que se generan por la carga estática, en cambio para la losa N°2, las tensiones que se producen por la aplicación del registro de aceleraciones del terremoto son mayores a las que se generan por la carga estática, debido a que este terremoto en particular, afecta mayormente a la losa N°2 que a la losa N°1, porque la losa N°2 es más flexible, ya que posee un periodo fundamental mayor, tal como lo muestran las figuras B.1 y B.2 del Anexo B.
 8. Los sismos que posean una componente de aceleración vertical importante, como el del 27 de Febrero del 2010, pueden provocar tensiones superiores a las que provocan cargas estáticas, como por ejemplo las cargas de diseño de la norma chilena NCh 1537.Of86.
 9. Se debería considerar la componente vertical y/o contenidos de frecuencias de terremotos en los análisis sísmicos, ya que otro sismo que posea una componente vertical mayor a la que tuvo el terremoto del 27 de Febrero del 2010 podría, eventualmente, provocar tensiones superiores a las que se consideran en los análisis para el diseño.

Bibliografía

- [1] BEHRENS, E. (2001) **Análisis de respuesta tensional de pavimentos rígidos de hormigón bajo la acción de cargas térmicas**. Informe de memoria de título para optar al título de Ingeniero Civil. Departamento de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, Universidad de Concepción. Chile.
- [2] NOVOA, N. (2001) **Análisis de cargas críticas en estructuras de cáscara delgada**. Informe de memoria de título para optar al título de Ingeniero Civil. Departamento de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, Universidad de Concepción. Chile.
- [3] PAZ, M. (1992) **Dinámica estructural teoría y cálculo**. Editorial Reverté, S.A, Tercera Edición. España.
- [4] OÑATE, E. (1992) **Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos**. Centro Internacional de Métodos de Numéricos en Ingeniería, Primera Edición. España.
- [5] TIMOSHENKO, S., WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1959) **Theory of plates and shells**. MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, Segunda Edición. Estados Unidos.
- [6] CHAKRAVERTY, S. (2009) **Vibration of plates**. Crc Press Taylor & Francis Group. Estados Unidos.
- [7] TIMOSHENKO, S. (1937) **Vibration problems in engineering**. D Van Nostrand Company, Inc, Segunda Edición. Estados Unidos.
- [8] BATOZ, J., BHATE, K., y HO, L. (1980) **A study of three-node triangular plate bending elements**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 15, pp. 1771-1812.
- [9] LUO, Z., HUTTON, S.G. (2002) **Formulation of a three-node traveling triangular plate element subjected to gyroscopy and in-plane forces**. Computers & Structures, Vol 80, pp. 1935-1944.

- [10] OYARZO, C. (2005) **Dinámica de estructuras, Sistemas con un grado de libertad**. Departamento de Ingeniería Civil. Facultad de Ingeniería, Universidad Católica de la Santísima Concepción. Chile.
- [11] BARRIENTOS, S. (2010) **Informe técnico actualizado 27 de Mayo del 2010, Terremoto de Cauquenes 27 de Febrero del 2010**. Servicio Sismológico, Universidad de Chile. Chile.
- [12] Norma Chilena Oficial *NCh* 433.Of96 1996 **Diseño Sísmico de Edificios**. Instituto Nacional de Normalización. INN Chile.

Anexo A

Cálculo de matrices de rigidez y masa para el elemento DKT

A.1. Sistema de coordenadas naturales

Debido a que las integrales de las ecuaciones (3.62) y (3.63) se evalúan, primero, sobre un sistema de coordenadas naturales ξ y η , es frecuente definir sobre la geometría normalizada del elemento triangular un sistema de coordenadas naturales ξ y η de manera que el elemento tenga los lados sobre los ejes $\xi = 0$, $\eta = 0$ y $1 - \xi - \eta = 0$ como se indica en la figura A.1, de donde se deduce que las coordenadas de área L_2 y L_3 coinciden con las coordenadas $\xi = 0$ y $\eta = 0$, respectivamente, y $L_1 = 1 - \xi - \eta = 0$.

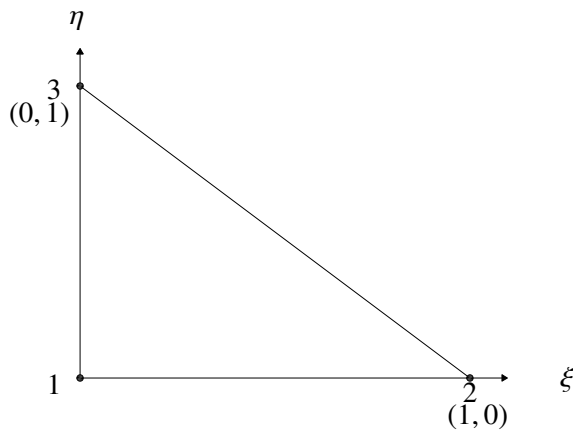


Figura A.1: Coordenadas naturales en un elemento triangular

A.2. Funciones de forma del elemento DKT y sus derivadas

Teniendo en cuenta lo anterior y que las funciones de forma y sus derivadas se encuentran en las integrales de las ecuaciones (3.62) y (3.63), dichas expresiones deben ser evaluadas en un número adecuado de puntos de integración para obtener una buena aproximación del valor de las integrales. Las expresiones de las funciones de forma y sus derivadas con respecto a ξ y η son:

Funciones de interpolación para el desplazamiento

$$\begin{aligned} N_{w_1} &= L_1 + L_1^2 (L_2 + L_3) - L_1 (L_2^2 + L_3^2) \\ N_{w_2} &= L_1^2 (c_3 L_2 - c_2 L_3) + \frac{1}{2} (c_3 - c_2) L_1 L_2 L_3 \\ N_{w_3} &= L_1^2 (b_2 L_3 - b_3 L_2) + \frac{1}{2} (b_2 - b_3) L_1 L_2 L_3 \\ N_{w_4} &= L_2 + L_2^2 (L_3 + L_1) - L_2 (L_3^2 + L_1^2) \\ N_{w_5} &= L_2^2 (c_1 L_3 - c_3 L_1) + \frac{1}{2} (c_1 - c_3) L_2 L_3 L_1 \\ N_{w_6} &= L_2^2 (b_3 L_1 - b_1 L_3) + \frac{1}{2} (b_3 - b_1) L_2 L_3 L_1 \\ N_{w_7} &= L_3 + L_3^2 (L_1 + L_2) - L_3 (L_1^2 + L_2^2) \\ N_{w_8} &= L_3^2 (c_2 L_1 - c_1 L_2) + \frac{1}{2} (c_2 - c_1) L_3 L_1 L_2 \\ N_{w_9} &= L_3^2 (b_1 L_2 - b_2 L_1) + \frac{1}{2} (b_1 - b_2) L_3 L_1 L_2 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Funciones de interpolación para el giro

$$\begin{aligned}
N_{\theta_{x_1}} &= 1,5 (a_6 N_6 - a_5 N_5) \\
N_{\theta_{x_2}} &= b_5 N_5 + b_6 N_6 \\
N_{\theta_{x_3}} &= N_1 - c_5 N_5 - c_6 N_6 \\
N_{\theta_{x_4}} &= 1,5 (a_4 N_4 - a_6 N_6) \\
N_{\theta_{x_5}} &= b_6 N_6 + b_4 N_4 \\
N_{\theta_{x_6}} &= N_1 - c_6 N_6 - c_4 N_4 \\
N_{\theta_{x_7}} &= 1,5 (a_5 N_5 - a_4 N_4) \\
N_{\theta_{x_8}} &= b_4 N_4 + b_5 N_5 \\
N_{\theta_{x_9}} &= N_3 - c_4 N_4 - c_5 N_5,
\end{aligned} \tag{A.2}$$

donde N_i son las funciones de forma del elemento triangular de seis nodos de clase C_0 ([4]), las cuales son las siguientes

$$\begin{aligned}
N_1 &= (2L_1 - 1) L_1 \\
N_2 &= (2L_2 - 1) L_2 \\
N_3 &= (2L_3 - 1) L_3 \\
N_4 &= 4L_1 L_2 \\
N_5 &= 4L_2 L_3 \\
N_6 &= 4L_1 L_3,
\end{aligned} \tag{A.3}$$

y

$$\begin{aligned}
a_k &= -\frac{x_{ij}}{l_{ij}^2} \\
b_k &= \frac{3}{4} \frac{x_{ij} y_{ij}}{l_{ij}^2} \\
c_k &= \frac{\frac{1}{4} x_{ij}^2 - \frac{1}{2} y_{ij}^2}{l_{ij}^2} \\
d_k &= -\frac{y_{ij}}{l_{ij}^2} \\
e_k &= \frac{\frac{1}{4} y_{ij}^2 - \frac{1}{2} x_{ij}^2}{l_{ij}^2} \\
l_{ij}^2 &= (x_{ij}^2 + y_{ij}^2),
\end{aligned} \tag{A.4}$$

son coeficientes de escala que relacionan la geometría del elemento triangular real con el triángulo de referencia de la figura A.1 definido por las coordenadas naturales ξ y η , donde $k = 4, 5, 6$ para los lados $ij = 23, 31, 12$ respectivamente.

Las derivadas de las funciones de interpolación del giro son las siguientes:

$$\frac{\partial^2 N_{\theta_x}}{\partial \xi^2} = \begin{bmatrix} p_6(1-2\xi) + (P_5 - P_6)\eta \\ q_6(1-2\xi) - (q_5 + q_6)\eta \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -p_6(1-2\xi) + \eta(p_4 + p_6) \\ q_6(1-2\xi) - \eta(q_6 - q_4) \\ -2 + 6\xi + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -\eta(p_5 + p_4) \\ \eta(q_4 - q_5) \\ -\eta(r_5 - r_4) \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial^2 N_{\theta_x}}{\partial \eta^2} = \begin{bmatrix} -p_5(1-2\eta) - \xi(p_6 - p_5) \\ q_5(1-2\eta) - \xi(q_5 + q_6) \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ \xi(p_4 + p_6) \\ \xi(q_4 - q_6) \\ -\xi(r_6 - r_4) \\ p_5(1-2\eta) - \xi(p_4 + p_5) \\ q_5(1-2\eta) + \xi(q_4 - q_5) \\ -2 + 6\eta + r_5(1-2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial^2 N_{\theta_y}}{\partial \xi^2} = \begin{bmatrix} t_6(1-2\xi) + \eta(t_5 - t_6) \\ 1 + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -q_6(1-2\xi) + \eta(t_4 + t_6) \\ -1 + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -q_6(1-2\xi) - \eta(q_4 - q_6) \\ -\eta(t_4 + t_5) \\ \eta(r_4 - r_5) \\ -\eta(q_4 - q_5) \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial^2 N_{\theta_y}}{\partial \eta^2} = \begin{bmatrix} -t_5 (1 - 2\eta) - \xi (t_6 - t_5) \\ 1 + r_5 (1 - 2\eta) - \xi (r_5 + r_6) \\ -q_5 (1 - 2\eta) + \xi (q_5 + q_6) \\ \xi (t_4 + t_6) \\ \xi (r_4 - r_6) \\ -\xi (q_4 - q_6) \\ t_5 (1 - 2\eta) - \xi (t_4 + t_5) \\ -1 + r_5 (1 - 2\eta) + \xi (r_4 - r_5) \\ -q_5 (1 - 2\eta) - \xi (q_4 - q_5) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

donde

$$\begin{aligned} p_k &= -6 \frac{x_{ij}}{l_{ij}^2} = 6a_k \\ q_k &= 3 \frac{x_{ij}y_{ij}}{l_{ij}^2} = 4b_k \\ t_k &= -6 \frac{y_{ij}}{l_{ij}^2} = 6d_k \\ r_k &= 3 \frac{y_{ij}^2}{l_{ij}^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

con $k = 4, 5, 6$ para los lados $ij = 23, 31, 12$ respectivamente.

Finalmente, para el cálculo de las matrices de rigidez y masa a través de las ecuaciones (3.62) y (3.63) se necesita definir un sistema de coordenadas cartesiano local (\bar{x}, \bar{y}) para cada elemento triangular, el cual es necesario para el ensamble de la matriz de rigidez y masa global. Este sistema se muestra en la siguiente figura

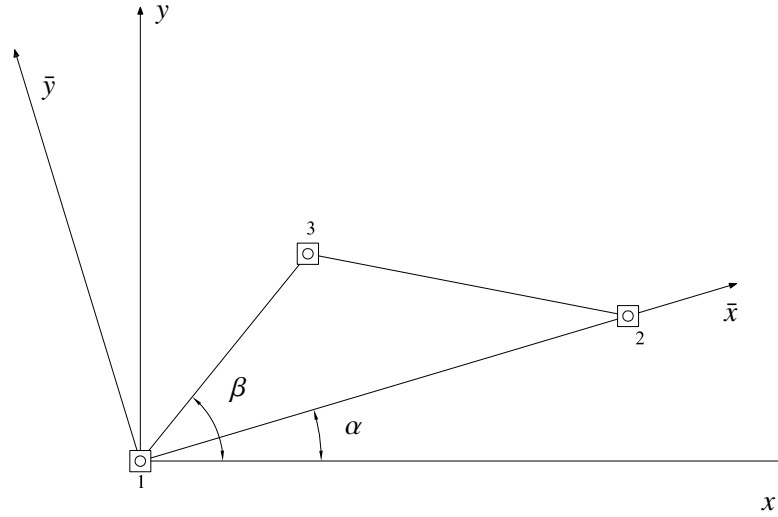


Figura A.2: Relación entre sistema de referencia cartesiano local y global.

Debido a lo anterior, las matrices elementales de rigidez y masa en términos de coordenadas globales, se calculan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [K_{DKT}^{(e)}] &= T^T K_{DKT}^{(e)} T \\ [M_{DKT}^{(e)}] &= T^T M_{DKT}^{(e)} T, \end{aligned} \quad (A.10)$$

donde T es la matriz de transformación de coordenadas dada por

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ 0 & -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (A.11)$$

Una vez obtenida la matrices de rigidez y masa locales, se realiza el clásico proceso de ensamblaje, a través de las relaciones geométricas y posicionales de cada elemento que compone la malla, con el objetivo de encontrar las respectivas matrices de rigidez y masa (globales) de la losa.

Anexo B

Espectro de aceleraciones para el registro vertical

Un espectro corresponde a un gráfico en el que se representa la máxima respuesta en el tiempo de un parámetro específico (desplazamiento, velocidad, aceleración, etc), originados por una sollicitación específica, para una familia de modelos de un grado de libertad. Cada uno de estos modelos posee propiedades dinámicas específicas (ξ , ω_n), por lo que en general se dibujarán espectros de respuesta para modelos con un nivel de amortiguamiento determinado (ξ), pero para distintos valores de masa y rigidez (ω_n). De esta manera se obtendrán distintos gráficos para diferentes valores de ξ , en el que se represente la máxima respuesta del parámetro en estudio en función de diferentes valores de ω_n (ver [10]).

B.1. Espectro de aceleraciones del registro vertical del terremoto del 27/02/2010

El espectro de aceleraciones del registro vertical del terremoto para una amortiguación $\xi = 5 \%$, es el siguiente:

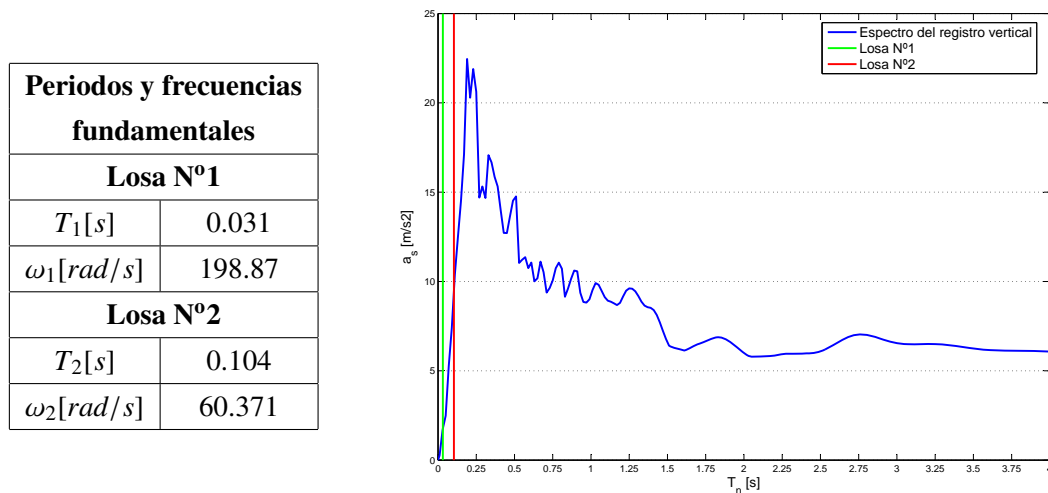


Figura B.1: Espectro de aceleraciones del registro vertical del terremoto 27/02/2010.

A continuación, en la figura B.2, se presenta un detalle de la zona del espectro del registro vertical, en donde se encuentran los periodos fundamentales de las losas N°1 y N°2.

B.1. ESPECTRO DE ACELERACIONES DEL REGISTRO VERTICAL DEL TERREMOTO DEL 27/02/2010

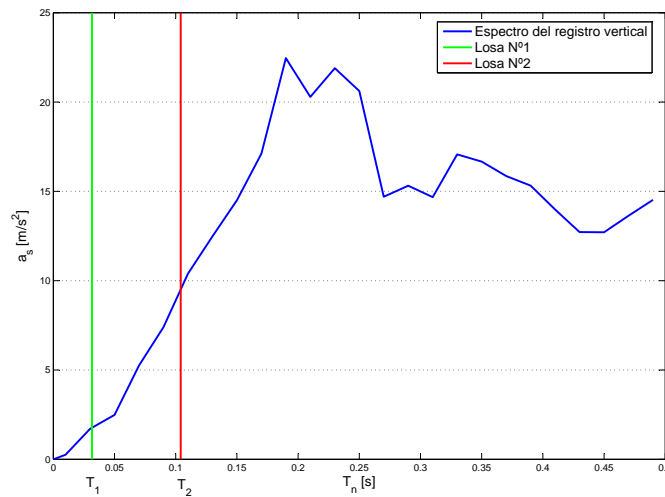


Figura B.2: Ubicación de los periodos fundamentales T_1 y T_2 de las losas N°1 y N°2 en el espectro del registro vertical de aceleración.

De las figuras B.1 y B.2, se puede observar que el periodo fundamental de la losa N°2 conlleva aceleraciones espectrales mayores que el de la losa N°1, porque la losa N°2 es una estructura más flexible, ya que posee un periodo fundamental mayor. Por lo tanto, este aumento en las aceleraciones espectrales, se debe a que este terremoto en particular, afecta mayormente a la losa N°2 que a la losa N°1, es por esto que las tensiones provocadas por el registro vertical de aceleraciones aplicadas sobre la losa N°2 superan a las que origina la carga estática aplicada sobre la misma losa, y para la losa N°1 son menores.